SEP SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEMS SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR | DGB | CCB 4/1

MÉTODO DE ESTUDIO

L^2SER^2

CÁLCULO DIFERENCIAL

LA DERIVADA

PROPÓSITO
Aplica los métodos de derivación , trabajando de forma metódica y organizada para contribuir en la solución de situaciones hipotéticas y/o reales de manera crítica y reflexiva.

APRENDIZAJE ESPERADO
Aplica fórmulas o teoremas de derivación en la solución de situaciones reales y/o hipotéticas se su vida cotidiana, trabajando de forma metódica y organizada.

CONTENIDO
- Derivadas de funciones algebraicas
- Derivadas de funciones trascendentes
- Derivadas de orden superior.

L ECTURA RÁPIDA DEL TEMA

Capta el contenido general de la lectura:
- Título del tema
  - Subtema
    - Apartados

Plantea preguntas
- ´¿Qué sé del tema?
- ¿Qué no sé del tema?
- ¿Qué me pueden preguntar del tema?

L ECTURA ATENTA Y COMPRENSIÓN

Lee con detenimiento para responder las preguntas anteriores.

En este momento ya tienes una idea general del contenido del tema. Ahora trata de:
- Detectar las ideas principales
- Descubrir su encadenamiento lógico
- Comprender su relación

LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por ello se habla del valor de la derivada de una cierta función en un punto dado.
Uno de los significados de la derivada, tiene que ver con la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de la función.
Para obtener la derivada de una función, se utiliza el concepto de límite a través del proceso llamado **Método de los cuatro pasos**.

Método de los 4 pasos.
La derivada de una función es el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$.
Por ejemplo: si la función es $f(x)=x^2$, entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}:$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x-h)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x^2-2xh-h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2+2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}2x+h$$
$$=2x$$

Es decir, la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)=x^2}$ es $\boldsymbol{f'(x)=2x}$
Esta forma de representar la derivada de una función es del matemático italiano Joseph-Louis Lagrange.

Otra manera de expresar esta derivada es:
$$\frac{d}{dx}x^2=2x$$
Esta manera de escribir la derivada se llama **notación de Leibnitz**, en honor a Gottfried Whihelm Leibniz, matemático alemán considerado uno de los matemáticos que desarrollaron esta rama de las matemáticas.
En las siguientes secciones derivaremos funciones usando las fórmulas de derivación y las representaremos con ambas notaciones.

DERIVACIÓN
DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

La derivada de una función constante
La derivada de una función constante $f(x)=c$ es 0; es decir:
$$\frac{d}{dx}c=0$$

Por ejemplo, si $f(x)=7$, entonces $f'(x)=0$
En la notación de Leibniz: $\frac{d}{dx}7=0$

La derivada de una función polinomial
La derivada de una función polinomial se obtiene a partir de las fórmulas 1-5 de la primera sección del formulario.
Por ejemplo, si $f(x)=2x^3-5x+6$, dado que es un polinomio, podemos derivar los términos por separado:
$\frac{d}{dx}2x^3=6x^2$ $\quad\frac{d}{dx}(-5x)=-5$ $\quad\frac{d}{dx}6=0$

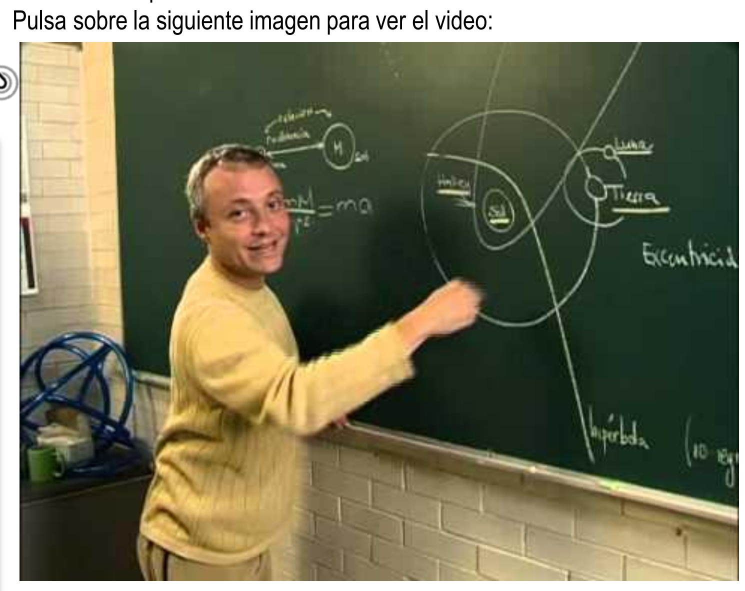
Entonces la derivada de $f(x)$ es $f'(x)=6x^2-5$
O bien
$$\frac{d}{dx}2x^3-5x+6=6x^2-5$$

Para mejorar tu técnica de derivación de funciones polinomiales, deriva las siguientes funciones:
a) $f(x)=9x^5+4x^3-2x+10$
b) $f(x)=100000x$
c) $f(x)=\pi x^2$

Determina $\frac{d}{dx}8x^7-4x^4+3x^2+5x-9$

¿QUÉ ES EL CÁLCULO?

La derivada de una función es un concepto muy importante para el desarrollo del pensamiento matemático.
Pulsa sobre la siguiente imagen para ver el video:



A partir del análisis de la información, contesta las siguientes preguntas::
1. ¿En qué siglo surge el cálculo?
2. ¿Qué formas describen las órbitas de los planetas?
3. ¿Qué tipos de problemas se pueden resolver con el cálculo?
4. Cuando se definen las funciones se muestran tres ejemplos con sus gráficas. ¿Qué ejemplos son?
5. En término físicos, ¿cuál es la función derivada de la función distancia?
6. En término físicos, ¿Cuál es la derivada de la función velocidad?
7. ¿Cómo es posible conocer la distancia que recorre un auto, conociendo solamente su velocidad?
8. ¿Qué relación hay entre la derivada y la integral?
9. ¿Qué significan los símbolos que usó Leibnitz al describir una integral?
10. ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?
11. ¿Cómo es la gráfica que se muestra para representar un ecosistema coyotes/conejos?
12. ¿Qué tipo de ecuaciones permiten estudiar cualquier ecosistema real?
13. ¿Qué ramas de la matemática surgen a partir del cálculo?

DERIVACIÓN

Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

1. $\frac{d}{dx}c=0$ *Derivada de la función constante*
2. $\frac{d}{dx}x=1$ *Derivada de la función identidad*
3. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ *Regla de la potencia*
4. $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$ *Regla el múltiplo constante*
5. $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$ *Regla de la suma (y diferencia)*
6. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ *Derivada de la función exponencial natural*

Reglas del producto y el cociente

1. $\frac{d}{dx}uv=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ *Regla del producto*
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ *Regla del cociente*

Derivadas de funciones trigonométricas

1. $\frac{d}{dx}(sen\,x)=\cos x$ *Derivada de la función seno*
2. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\,x$ *Derivada de la función coseno*
3. $\frac{d}{dx}(\tan x)=sec^2x$ *Derivada de la función tangente*
4. $\frac{d}{dx}(ctg\,x)=-csc^2x$ *Derivada de la función cotangente*
5. $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\,\tan x$ *Derivada de la función secante*
6. $\frac{d}{dx}(\csc v)=-\csc x\;ctg\,x$ *Derivada de la función cosecante*

Regla de la cadena

1. $Si\;y=f(u),u=g(x),entonces\quad\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{du}{dx}$ *Regla de la cadena*
2. $\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ *Regla de la cadena combinada con la potencia*
3. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$

Derivadas de las funciones logarítmicas

1. $\frac{d}{dx}(log_ax)=\frac{1}{x\ln a}$
2. $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$
3. $\frac{d}{dx}(In\;v)=\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\;ln|x|=\frac{1}{x}$

DERIVACIÓN
DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Derivada de una función exponencial
La derivada de una función exponencial $f(x)=a^x$ es $f'(x)=a^x\ln a$ es decir: $\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$
Por ejemplo, si $f(x)=2^x$, entonces $f'(x)=2^x\ln 2$
En la notación de Leibniz: $\frac{d}{dx}2^x=2^x\ln 2$
En el caso particular de la función exponencial $f(x)=e^x$, su derivada es $f'(x)=e^x$; es decir, la función $f(x)=e^x$ ¡es igual a su derivada!

Derivada de una función logarítmica
La derivada de una función logarítmica $f(x)=\log_a x$ es $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$; es decir: $\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$
Por ejemplo, si $f(x)=\log_3 x$, entonces $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$
En la notación de Leibniz: $\frac{d}{dx}\log_3 x=\frac{1}{x\ln 3}$
Cuando la base del logaritmo es el número **e**, la función se escribe $f(x)=\ln x$ cuya derivada es $f'(x)=\frac{1}{x}$
Es decir, $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

Derivada de una función trigonométrica
La derivada de las funciones trigonométricas son 6 como se muestra en el formulario.
Por ejemplo, la derivada de $f(x)=sen\,x$ es $f'(x)=\cos x$
En realidad, solamente la práctica hará que no dependas del formulario para obtener la derivada de cualquier función y, en particular, de las funciones trigonométricas.

DERIVACIÓN
DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La segunda derivada
El proceso de derivación puede hacerse de manera iterativa. Por ejemplo, la derivada de $f(x)=2x^3$ es $f'(x)=6x^2$ si a esta nueva función la volvemos a derivar, tendríamos: $f''(x)=12x$ y volviendo a derivar: $f'''(x)=12$ y volviéndolo a hacer: $f^{iv}(\mathrm{x})=0$
En notación de Leibniz tendríamos:
$\frac{d}{dx}2x^3=6x^2;\quad\frac{d^2}{dx^2}2x^3=12x;\quad\frac{d^3}{dx^3}2x^3=12;\quad\frac{d^4}{dx^4}2x^3=0$

Practica un poco con los siguientes ejercicios:

a) $\frac{d^3}{dx^3}7x^5=0$
b) $\frac{d^5}{dx^5}2x^6=0$
c) Determina la segunda derivada de $f(x)=sen\,x$

S UBRAYAR

Detecta ideas principales.

Subraya solo lo más importante. Se trata de subrayar palabras, frases y datos que contiene lo fundamental.
Anota en el margen la palabra clave.

E SQUEMATIZAR

Sintetiza y organiza la información

Se trata de hacer una síntesis de lo subrayado en forma de ideas (palabras-clave, expresiones) y frases cortas; ello facilitará el estudio y el repaso para los exámenes.

R ECITAR

Mentalmente repasa el contenido. En voz alta repite el esquema remarcando ideas importantes.

Recita cada apartado de la siguiente forma:
- Mentalmente
- Sin libro ni apuntes
- Recita el contenido de cada pregunta

R EPASAR

Repite el tema o el esquema de memoria y en voz alta.

Repasa todo el tema:
- Primero, dando un vistazo rápido a tu esquema
- Luego, sin mirar los esquemas y en voz alta si es posible.
- Repasa las preguntas en orden distinto al estudiado, alternándolas y estableciendo las conexiones y relaciones que tienen entre sí.

JOSÉ LORENZO SÁNCHEZ ALAVEZ