**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS**

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD DISTRITO FEDERAL

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

# *i-Locus*

## Exploraciones digitales del lugar geométrico

TESIS

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias

en la Especialidad de Matemática Educativa

presenta:

**JOSÉ LORENZO SÁNCHEZ ALAVEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. LUIS E. MORENO ARMELLA**

México, D. F., Octubre de 2012

**Synopsis**

This research describes the effect on the actions that a subject takes to perform a task mediated by a digital environment and becomes evident by the way the subject proceeds when using this tool, how the task is handled, its procedures and adjustments during the resolution of the problem involving the concept of locus.

The study of the effects of dynamic digital mediation on student's cognitive strategies, conceived in this study as the combination of dynamic geometry software and a digital artifact we call interactive surface, allow exploring the process of internalization of the locus.

**Key words**: Locus, internalization, digital technology, instrumental mediation.

## Sinopsis


Esta investigación describe el efecto en las acciones que un sujeto sigue y adapta, para realizar una tarea mediada por un entorno digital y que se hace evidente por el modo en que procede al usar dicha herramienta, la forma como asume la tarea, sus procedimientos y los ajustes a estos durante la resolución del problema que involucran el concepto de lugar geométrico.

El estudio de los efectos de la mediación digital dinámica sobre las estrategias cognitivas de los estudiantes, concebida en este trabajo como la conjugación de software de geometría dinámica y un artefacto digital que llamaremos *superficie interactiva*, permite explorar el proceso de internalización del *locus*.



**Palabras clave.** Locus, internalización, tecnología digital, mediación instrumental.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, el apoyo económico a través de la beca **28744**, con número de registro **167468**, en el periodo comprendido del 01/02/2009 al 31/01/2012, para cursar el programa de Doctorado en Ciencias en la Especialidad en Matemática Educativa.

Agradezco a la Dirección General de Educación Secundaria Técnica, el apoyo otorgado para la realización de estos estudios a través de la beca-comisión comprendida entre los ciclos escolares 2010-1012

Para

**Axel, Jesi, Dérek y Fania**+

Para

**Erica**

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer profundamente al **Dr. Luis E. Moreno Armella**, la cálida oportunidad de crecer bajo su tutela a partir del afecto inherente en cada conversación.

Estoy agradecido con las maravillosas personas que se han visto involucrados en este proceso. Todos ellos puntos de inflexión de mis momentos críticos.

**Dr. Marco Antonio Santillán Vázquez**. *Sinodal*. Por su valioso tiempo en esas charlas clarificadoras.

**Dr. Hugo Mejía Velasco**. *Sinodal*. Por sus importantes sugerencias y aportaciones al documento.

**Dr. Gonzalo Zubieta Badillo**. *Sinodal*. Por su colaboración precisa en aspectos fundamentales de la tesis.

**Dr. Ramón Salat Figols**. *Sinodal*. Por el ánimo contagioso en cada palabra compartida.

**Higinio Barrón Rodríguez**. Por ser mi maestro, ejemplo, compañero, jefe y amigo.

A **Fabio**. Cómplice. Amigo entrañable.

A **Eli**. Por brindarme su confianza y el espacio en la DA y CM, para la exploración digital con los profesores.

A **Ingrid**. Por todo

A **Adriana Parra**. Por su infinita paciencia.

A **Lito**. En representación de todos. Ejemplo singular.

Al **Área 2 Norte de Operación y Gestión**. Mi auto-exilio académico. Génesis de las Superficies Interactivas.

## Índex

# CAPÍTULO I

# EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## Introducción.

El desarrollo vertiginoso de la tecnología digital y la necesidad de comprender y resolver las dificultades de aprendizaje en matemáticas, convergen en una rama de investigación en la que se halla enmarcado este trabajo; esto es, la matemática educativa.

En particular, en este trabajo se estudia el efecto del software dinámico en las estrategias cognitivas de los estudiantes-profesores al resolver problemas que involucran el concepto de lugar geométrico.

Más adelante daremos mayor precisión y concreción a estas ideas que constituyen uno de los estratos teóricos más importantes en que se sustenta esta investigación.

Describiremos y analizaremos las acciones que un sujeto sigue y adapta, para realizar una tarea mediada por una herramienta y que se hace evidente por el modo en que procede al usar dicha herramienta, la forma como asume la tarea, sus procedimientos y los ajustes a estos durante la resolución del problema en cuestión.

## Planteamiento del problema.

Esta investigación plantea dos direcciones. Por una parte, nos apoyamos en la historia del concepto de lugar geométrico para trasladar esas construcciones en un ambiente dinámico y, por otra, en el ámbito de la educación matemática actual, intentamos observar cómo la idea del lugar geométrico o *locus* por su etimología en latín, se internaliza con la mediación de *artefactos digitales*. Para ello diseñamos y analizamos una serie de actividades-problema que permitieron evidenciar este proceso.

Se parte de la idea de que las herramientas influyen en los usuarios llevándolos a desarrollar un estilo o enfoque cognitivo distintivo (Ruthven, 1990, pág. 438) y que cada herramienta evoca procesos mentales diferentes y diferentes consecuencias sobre la formación y desarrollo de las ideas (Chassapis, 1999, pág. 278). Esto constituye la entrada a la idea de internalización de los artefactos que la cultura suministra vía el sistema educativo.

Nos centraremos en el papel mediador de la geometría dinámica; por ello, se hace necesario diferenciar el conjunto de puntos estáticos en el mundo de papel y lápiz denominado *lugar geométrico*, del locus como objeto dinámico en su versión digital. Es esta segunda representación, proporcionada por medios informáticos, la que estudiamos en este documento. Nos interesa explorar cómo el carácter manipulable de la versión digital modifica la acción de los profesores al resolver problemas y por ello nos apoyamos en construcciones realizadas en un ambiente de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar figuras o elementos de ella, sin perder las relaciones estructurales establecidas, efecto llamado *dragging* o *arrastre*, contribuye al realismo de los objetos matemáticos involucrados. (Moreno L. , 2002). Al modificar, vía el arrastre, una versión dinámica de algún locus, cada instanciación del mismo lo vemos como un estado transitorio. Esta condición manipulable, es una *representación ejecutable* (Moreno L. , 2002) del lugar geométrico.

En este marco, planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se vincula con los saberes existentes en momentos nodales de la historia de la matemática la idea de locus?
- ¿En qué contextos históricos se concibieron los lugares geométricos como la trisectriz de Hippias, la cicloide, la versiera de Agnesi, etc.?
- ¿Cuáles eran las motivaciones para considerar estas curvas?
- ¿Qué cambia la acción cognitiva al incorporar artefactos digitales en problemas que involucran lugares geométricos?
- ¿Qué papel juegan las *representaciones ejecutables* en el proceso de internalización del concepto de lugar geométrico?
- ¿Cómo interviene la dimensión temporal, o ejecución en tiempo real, en el proceso de internalización del concepto de lugar geométrico?
- ¿Qué nuevos rasgos hacen visible las representaciones digitales de *i-Locus*?

# CAPÍTULO II

# MARCO REFERENCIAL

## Introducción

En nuestro marco teórico es de importancia central el proceso de *internalización*, enunciado inicialmente por Vygotsky, para la conformación de las estructuras cognitivas de la persona, en particular del estudiante. Este concepto lo  Los recursos que el medio sociocultural suministra a la persona, eventualmente llegan a formar parte de sus propios recursos cognitivos. Los ejemplos clásicos son el sistema de escritura y el sistema numérico.

En nuestro caso, exploramos la apropiación de la geometría dinámica mediante  la observación de las transformaciones de las estrategias que el estudiante pone en juego al resolver problemas. Encontramos evidencias de ello en el tipo de argumentos que sostienen sus respuestas y en las modificaciones  que introducen con respecto a las soluciones desarrolladas mediante papel y lápiz.

Un hecho central de las actividades diseñadas para la toma de datos, consistió en proponer problemas que conducen a la delimitación de un conjunto de puntos que satisfacen una o más condiciones determinadas, dando origen a un ***lugar geométrico***. Sin embargo, es la internalización del medio dinámico en principio, la que permite una exploración correspondientemente dinámica de la estructura de este locus. Este estudio no es exclusivo para este concepto matemático, pues hay muchos otros problemas de las matemáticas escolares que pueden abordarse en el mismo sentido.

Esta condición digital constituye lo que llamaremos ***situaciones borde***, pues pueden tratarse o bien dentro de los contextos estáticos tradicionales o bien desde una perspectiva dinámica. (Moreno L. , 2011)

Los procesos de internalización aludidos anteriormente invitan a la introducción de una perspectiva histórica dentro del análisis de la constitución del conocimiento matemático.

Parte significativa de nuestro trabajo estará constituida por un estudio en esta dirección.

## Mediación

Desde nuestros orígenes como especie, los seres humanos tuvimos el objetivo de sobrevivir y permanecer en el planeta y para ello tuvimos que transformarlo y transformarnos. Esta acción de modificar el entorno para nuestra supervivencia, que a su vez favoreció un cambio en nuestra cognición, puede entenderse en términos de ***acción mediada***: toda acción humana es una acción mediada por herramientas materiales o simbólicas. (Wertsch J. V., 1993)

Ejemplos de acción mediada se encuentran en la manera de cómo concebimos la solución numérica a un problema matemático a través del sistema decimal; o bien, en el uso de herramientas materiales para transformar un entorno adverso en un espacio habitable.

Esta acción mediada debe ser estudiada desde sus escenarios socioculturales, bajo el principio de que la vida mental es vida social internalizada. Es decir, que la cognición humana y su entorno cultural son *co-extensivos*. La cognición no está al margen de una cultura. En este sentido, los artefactos culturales como la oralidad, la escritura, el sistema decimal y la gestualidad, por citar algunos, se tornan extensiones cognitivas. Estas extensiones cognitivas se internalizan, (Vygotsky, 2010), se hacen transparentes (Pozo, 2001), y en algunos casos, modifican dialécticamente a los propios artefactos culturales.

Ahora bien, en un escenario educativo, la convergencia y transformación entre las matemáticas de lápiz y papel y las nuevas formas de mediación, ofrecen una nueva expresividad matemática. Las representaciones digitales extienden la dimensión conceptual de los **objetos borde** (Moreno, 2011)

Podemos centrar nuestra atención en el papel mediador de la geometría dinámica durante el proceso de internalización del concepto de lugar geométrico; por ello, se hace necesario resaltar que los conjuntos de puntos en el mundo de papel y lápiz denominado *lugar geométrico*, pueden ser explorados a través de su representación ejecutable dentro de un ambiente dinámico, es decir en su

**refracción digital** (Moreno L. , 2010). El locus como objeto borde, es lo que denominaremos ***i-Locus***.

No hay objetos matemáticos que antecedan a su representación (Moreno L. , 2011), es decir al margen de una actividad semiótica.

René Magritte (1898-1967) permite reflexionar al respecto. En su obra *La traición de las imágenes*, cuestiona la relación entre las imágenes y las cosas basadas en la semejanza representativa. A diferencia de la pipa Magritte (Ilustración 1), que antecede a su representación pictórica, un objeto matemático solo existe a través de su representación. Por ejemplo un triángulo es una representación de sí mismo. No existe un triangulo antes de su representación.


Ilustración 1: La traición de las imágenes (Esto no es una pipa) 1928/29. Los Ángeles, Country Museum

Incluso, un mismo objeto matemático parecería distinto a si mismo en sus distintas representaciones. Esto es como ver un lápiz, digamos, a en un vaso que contiene agua y aceite. Aunado al aire, tenemos tres representaciones del mismo objeto. El objeto es el mismo, pero en cada medio proporciona una refracción distinta. (Ilustración 2)

Ilustración 2: Refracción

En matemáticas, es posible considerar la refracción en distintos medios como el tratamiento de un objeto matemático en sus distintas representaciones, lo que hace que permanezca en constante evolución. Por ejemplo en un ambiente dinámico, al modificar, vía el arrastre, las condiciones estructurales del *i-Locus*, cada instanciación del mismo es un estado transitorio del concepto matemático en permanente construcción.

Pretendemos, pues, explorar el sendero que va tomando la actividad cognitiva de un individuo inmerso en un entorno dinámico, moldeado por el mismo entorno y por la acción propia del individuo sobre él. (Moreno & Hegedus, 2009)

## Los artefactos culturales

El uso que el hombre hace de su mente (en desarrollo permanente), depende de su capacidad para inventar y utilizar ***herramientas, instrumentos o tecnologías*** que le permitan expresar y amplificar sus poderes corporales y mentales (Bruner, 1995). En el caso del entorno que propicia la geometría dinámica, los objetos matemáticos adquieren nuevas manifestaciones que serían imposibles de representar sin esta ***mediación*** (Moreno, 2003). En un sentido más profundo, las representaciones digitales permiten extender la dimensión conceptual de los objeto borde (Moreno, 2011).

La acción humana emplea instrumentos mediadores tales como las herramientas o el lenguaje y estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial (Wertsch J. , 1993). Así, es interesante explorar los efectos que tienen las ***representaciones ejecutables*** (que para nosotros son las existentes en el medio geométrico digital) en la comprensión del concepto de lugar geométrico.

La mediación digital propicia nuevos mundos representacionales, nuevos contenidos que inminentemente deberán considerarse en el currículum escolar. Los sistemas de representación que ofrece la geometría dinámica (*Cabri* géomètre*, Skechtpad, Geogebra, Geomaster, Cinderella*, entre otros), son algunos de los artefactos culturales que terminarán por volverse ***artefactos cognitivos*** de los nuevos estudiantes de matemáticas. Como la escritura, la geometría dinámica se hará transparente, se naturalizará en los estudiantes (Pozo, 2001).

Las representaciones digitales han modificado la naturaleza de las exploraciones de los objetos matemáticos. Mediante ellas se hacen más perceptibles y novedosas, pues dichos objetos existen a través de sus representaciones y de ningún otro modo. Es decir, que las herramientas no existen por sí mismas, se convierten en ***instrumentos matemáticos*** cuando el sujeto ha sido capaz de apropiárselo por él mismo, e integrarlo a su actividad (Guin, D. & Trouche, L., 1999)

En este estudio, es de importancia central el proceso de ***internalización*,** concepto abordado inicialmente por Vygotsky, para la conformación de las estructuras cognitivas de la persona, en particular del estudiante. Los recursos que el medio sociocultural suministra a la persona, eventualmente llegan a formar parte de sus propios recursos cognitivos. Los ejemplos clásicos son el sistema de escritura y el sistema numérico.

Realizar operaciones básicas con números, pareciera una actividad natural, inmutable en algunos casos, al grado de que no reparamos en la presencia inherente del sistema decimal empleado. Este fenómeno es solo un ejemplo de cómo un instrumento suministrado por la cultura entra a formar parte de nuestra forma de pensar, es decir, un instrumento transformado en un instrumento cognitivo. (Moreno, 2011)

Sin embargo, es necesario precisar qué entendemos por ***pensar con*** y ***pensar a través*** de un sistema semiótico. La diferencia es sustancial.

Se piensa *con* un sistema semiótico cuando se usa como un instrumento cultural, por ejemplo, al trabajar con el número 1000 en otros sistemas como $1111101000_2$ o bien con $1750_{8.}$ En general, los sistemas numéricos distintos al 10 en muchas culturas, incluida la nuestra, no han sido incorporados a la manera de pensar de sus individuos.

Se piensa a *través* de un sistema semiótico cuando este ha sido incorporado a nuestra cognición, por ejemplo cuando escribimos una carta. (Moreno & Hegedus, 2009). En el caso de nuestro ejemplo anterior, cuando escribimos o decimos “mil”.

En esta investigación, damos más atención a los procesos que intervienen para que el individuo piense a través de los sistemas semióticos que permiten las representaciones ejecutables de los lugares geométricos. Así, exploramos la apropiación de la geometría dinámica mediante la observación de las transformaciones de las estrategias que el estudiante pone en juego al resolver problemas. Encontramos evidencias de ello en el tipo de argumentos que sostienen sus respuestas y en las modificaciones que introducen con respecto a las soluciones desarrolladas inicialmente en papel y lápiz.

Un hecho central de las actividades diseñadas para tal efecto, consistió en proponer problemas que conducen a la delimitación de un conjunto de puntos que satisfacen una o más condiciones y que determinan un ***lugar geométrico***. Por otra parte, el proceso de internalización del medio dinámico permitió un estudio correspondientemente dinámico de la estructura de estos lugares geométrico. Esta condición se enmarca en lo que se denomina ***situaciones borde*** del locus, pues pueden tratarse dentro de los contextos estáticos tradicionales o bien desde una perspectiva dinámica. (Moreno & Hegedus, 2009)

## Internalización

La concepción de Karl Bühler, de que el desarrollo psicológico es un proceso gradual de internalización de acciones adaptativamente útiles, influyó en la noción de internalización como la concibió Vygotsky (Kozulin, 1990):

> "Cualquier función mental superior tiene que atravesar necesariamente un estadio externo de desarrollo porque inicialmente es una función social. Este es el centro de todo el problema de la conducta interna y externa…
>
> Cuando hablamos de un proceso "externo" quiere decir "social". Cualquier función mental superior fue externa porque fue social en algún momento antes de convertirse en una función interna, verdaderamente mental"

Vygotsky consideraba que el carácter social de una función "externa" se conserva cuando esa función se internaliza. Sin embargo, la transición de una forma de actividad explícitamente social a su versión internalizada e individualizada puede llevar consigo un momento de regresión funcional.

Un ejemplo del proceso de internalización de la función mental superior como la de los procesos mnemónicos (frases fáciles de aprender y que se utilizan para recordar conceptos más complejos) basados en ayudas externas de la memoria, producen los siguientes cambios:

a) El proceso mnemónico natural se ve remplazado por una forma mediada de almacenamiento y recuperación.
b) El proceso natural no desaparece, pero se ve desplazado del centro de la actividad convirtiéndose en su elemento subordinado.
c) Las formas superiores de actividad mnemónica representan un sistema funcional más que una sola función, un sistema en el que pueden participar el pensamiento conceptual y el análisis verbal.

Una interpretación de esta idea central se representa en el siguiente esquema:

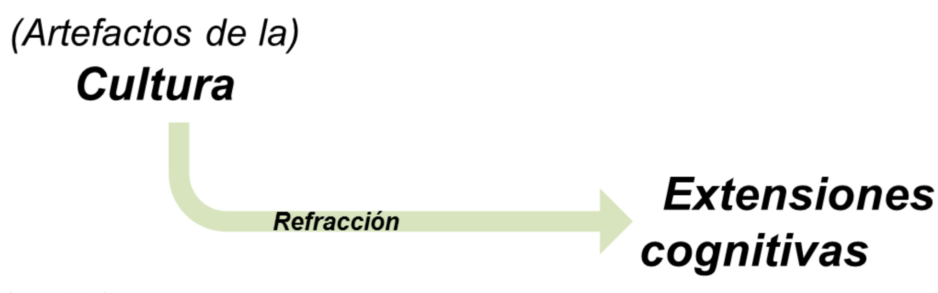



Ilustración 3: El proceso de internalización

Los artefactos culturales se tornan extensiones cognitivas. (Moreno L. , 2010), es decir, los instrumentos que la cultura suministra a las personas, tienen su propia refracción en los individuos y se transforman en extensiones cognitivas. Por ejemplo, una calculadora científica para un estudiante de ingeniería representa una herramienta que es un auxiliar de su cognición. La herramienta no modifica su pensamiento sino que amplifica su capacidad de entender el problema matemático a resolver. Sin embargo, el uso constante de esta herramienta puede propiciar en este estudiante cambios en su estrategia de solución o bien, en su manera de plantear el problema. En este caso el pensamiento del estudiante se ve afectado por la presencia de la calculadora. Piensa con y a través de ella. Es pues una extensión cognitiva del estudiante. (Moreno L. , 2002)

Un ejemplo más concreto lo representamos en la ilustración 4. El chelo “Duport” es una verdadera extensión del chelista Rostropóvich (1927-2007). Este artista, considerado el mejor chelista del siglo XX  existe en conjugación con el instrumento.

Ilustración 4: Mstislav Rostropóvich y su chelo “Duport”

# CAPÍTULO III

# NARRATIVA HISTÓRICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO

## Introducción

La validez de los conocimientos científicos depende de la época en que éstos son tratados. Por ejemplo, la validez de una prueba es una función del tiempo. (Bell, 2010). De aquí se desprende que criticar a una época por resolver problemas dentro de sus propias limitaciones equivale a no aceptar la posibilidad de imaginarnos las matemáticas del futuro. El conocimiento está abierto al tiempo y a las culturas en donde se desarrolla. El conocimiento tiene una historia y por ello siempre es aleccionador buscar su génesis.

Con este enfoque miraremos contextos históricos en el que emergen algunas curvas como tales. Cabe mencionar que no se pretende llegar a una clasificación de estos objetos matemáticos, sino resaltar las condiciones histórico-matemáticas que les dieron origen. Esto incluye los problemas que se resolvieron con su mediación.

## Del sílex al pixel: historia del trazo humano. Los orígenes de la forma

Cuando los primeros seres humanos liberaron sus manos, para otorgar a sus piernas la responsabilidad casi única de la movilidad, iniciaron una vertiginosa transformación del medio natural hacia un entorno artificial que les permitiera sobrevivir.

Las manos descansaban libres y con ello se propició la retención, el transporte y manipulación de diversos objetos. Quizá el más importante de esos objetos fue la piedra, que le sirvió, entre otras cosas, como arma para atacar y defenderse. Un accidente, la piedra rota por azar, permitió reconocer un valor agregado que valía la pena conservar. Así que este primitivo artefacto humano y ese accidente que lo puso en la mano del hombre, empezó a imitarse deliberadamente. Se había dado el primer paso a la construcción de herramientas para usarse con fines específicos, para mediar la acción humana. (Ilustración 5)


Ilustración 5: Mediación y evolución

Es probable que las primeras piedras afiladas fueran descubiertas espontáneamente por esos primeros homínidos y reconocidas en otras piedras que al romperse adquirían esa nueva propiedad. La manera de reconocerlo fue la ***forma***. (Williams, 1984). A esta manera de obtener este artefacto, se le ha denominado *mutación primaria*. El proceso deliberado para obtener esta propiedad quedó establecido en los primeros grupos sociales y se repetían con cierta intención, buscando ahora mejorar su función. A esta secuencia de transformación se le denomina *mutación libre*. (Williams, 1984)

La piedra que fue hallada, sólo requería observación y una visión selectiva que permitiera elegir de forma rudimentaria aquella que pudiese ser mejor artefacto que otro. Sin embargo, la piedra que fue deliberadamente transformada en herramienta mediante ciertos actos que albergaban un fin, exigía ya un razonamiento que se expresaba a través del conocimiento del tipo de material que se trabajaba, de los movimientos específicos de la mano para tallarlo, de una destreza visual para determinar el momento en que el artefacto tenía las suficientes características para ser usado y, en general, de la coordinación de todas estas tareas. La importancia de la construcción de estas primeras herramientas, consiste en que las mejoras subsecuentes surgieron a partir del mismo uso de la herramienta más que de la forma original del objeto sugería. Esto es, una herramienta realiza la Zona de Desarrollo Próximo del Artefacto (ZPDA) de ella misma en su versión anterior (Hegedus, S.J. & Moreno-Armella, L., 2010) (Ilustración 6).

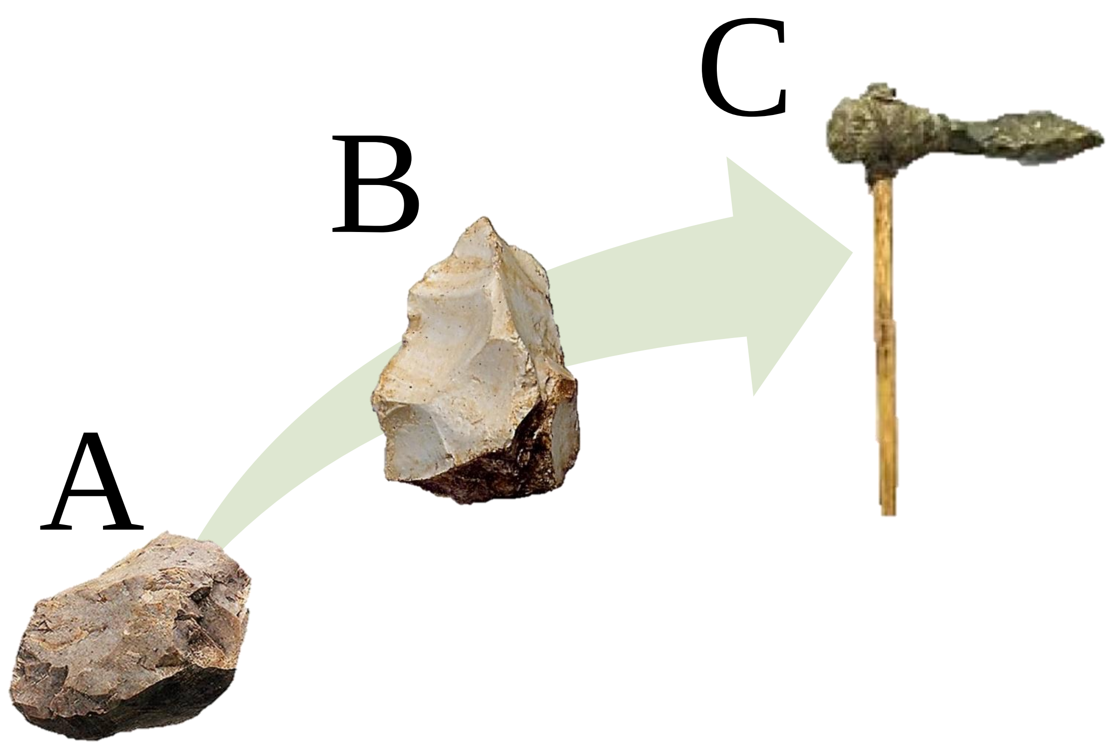



**Ilustración 6: A) Descubrimiento de un objeto que es utilizado sin alteración de su forma. B) Manipulación de ese objeto para ajustarlo a una forma deseada. C) Fabricación de una herramienta: la realización de la ZPD de B**

Otro aspecto que se debe considerar es la inmediatez de la solución de un problema. Por ejemplo, para escarbar un poco de tierra era suficiente auxiliarse de alguna rama disponible en el entorno; sin embargo, la tarea pierde inmediatez en su solución cuando lo que se tiene que escarbar es un área más dura. En este caso surge la necesidad de crear una herramienta que aporte mayor poder al golpe con que se perfora el suelo. El utensilio formado a partir de dos ramas atadas entre sí, que permite una azada más liviana. Este es el origen de la invención.

La invención y el descubrimiento acortaron los pasos repetitivos y de dilapidación que se requerían en esas tempranas etapas evolutivas, para acceder a un conocimiento. En el caso de las primeras herramientas, se transfería la forma y un concepto a través de distintos materiales; un ejemplo de la realización de la ZPDA (Hegedus & Moreno, 2009), lo muestra la evolución del cuchillo. (Ilustración 7).

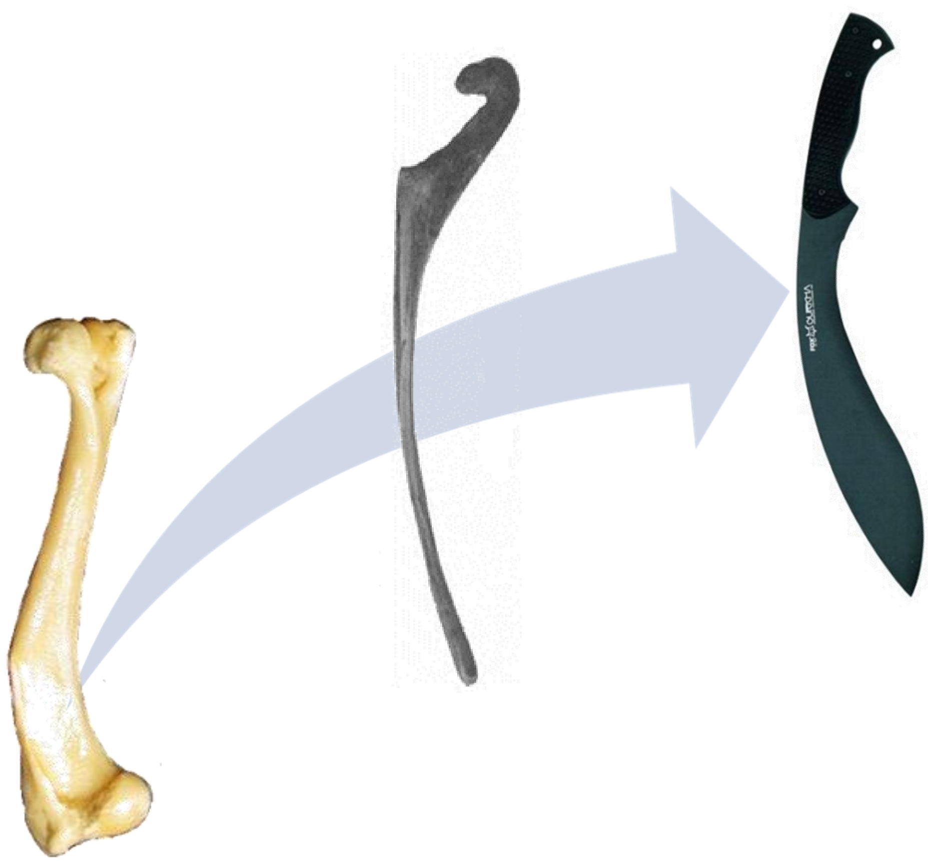


**Ilustración 7: Realización de la ZPDA. Un hueso curvo fue afilado en su borde inferior y aportó su forma para el diseño del primer cuchillo de bronce, evolucionando después en una herramienta más precisa de corte al pasar del hierro al acero.**

El hombre primitivo no sólo encontró piedras. A su alrededor descubrió otras formas: la silueta de las montañas en el atardecer, la redondez de la luna, los picos de las hierbas silvestres, la articulación de una pata de conejo… y se descubrió a sí mismo.

El cuerpo humano fue una fuente diversificada de distintas formas que se tradujeron, algunas de ellas, en herramientas para agarrar, cortar, rascar, medir, etc. Así es como los primeros humanos, con sus manos torpes, diseñaron los primeros artefactos, pero tras establecer una forma y un método de construcción, las herramientas posteriores adquirieron adaptaciones a partir del uso y de la influencia de las propiedades inherentes a esa tecnología.

Las sociedades primitivas desarrollaron su propia tecnología, pero al entrar en contacto con otras civilizaciones, las tecnologías se mezclaron dando un impulso nuevo a la mejora de las propiedades de las herramientas.

### Primeras manifestaciones. El número y la forma

Los orígenes de las matemáticas se pierden en el tiempo y son tan desconocidos como los del lenguaje y el arte y aún en sus primeras manifestaciones civilizadas habrá una imprecisión natural si se pretende fijarlos en una línea temporal rígida. Hasta hoy, el sentido matemático ha llegado por dos corrientes principales: el número y la forma. Esta segunda corriente debe interpretarse en un sentido más general que el relacionado solo con el contorno de las figuras planas y los sólidos.

Las evidencias históricas apuntan hacia Mesopotamia como el lugar donde emergen las primeras manifestaciones matemáticas, en un periodo que se remonta hasta el año 5700 antes de nuestra Era (ANE). En esta época, un pueblo predecesor de los babilónicos, los Sumerios empezaron a contar su año a partir del equinoccio de primavera, cuando el sol se encontraba justo en la constelación hoy llamada Taurus (Ilustraciones 8 y 9). Esta observación derivó en el primer mes de un calendario útil que llevó por nombre *Toro*.

Ilustración 8: Vista nocturna en el equinoccio de primavera

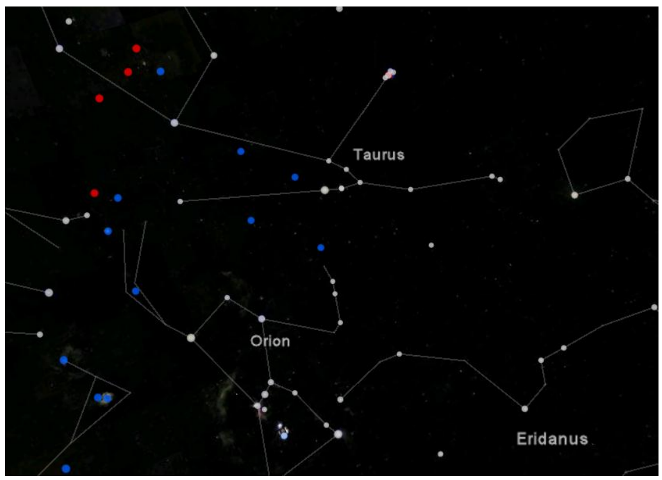



Ilustración 9: Forma asociada a la constelación Taurus

Por su parte, en Egipto alrededor del año $4241 \pm 200$ ANE, también basados en una observación astronómica, se adoptó un calendario de 12 meses de 30 días al que se agregaban 5 días de festividad haciendo un total de 365 días. Ahora, la referencia astronómica fue la aparición de la estrella Sirio sobre el horizonte este, después de su periodo de invisibilidad, es decir, el orto helíaco de la estrella más brillante de la constelación del Can Mayor. (Ilustraciones 10 y 11)

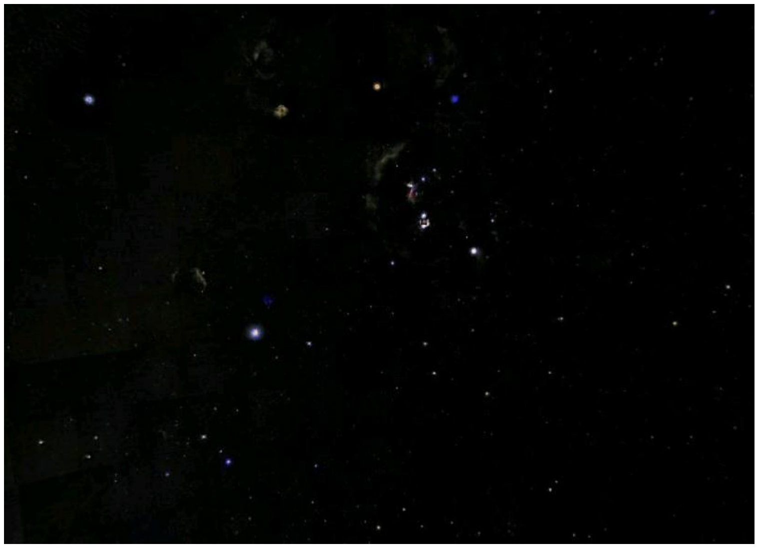


Ilustración 10: Cielo nocturno que anunciaba la inundación anual del Nilo.

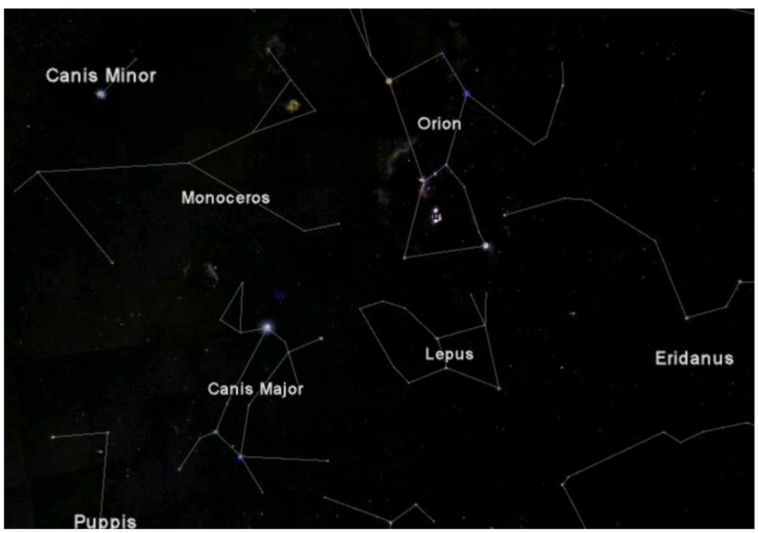



Ilustración 11: Forma asociada a la constelación Can Mayor, cuya estrella más brillante es sirio

La aritmética y las mediciones se desarrollaron en Babilonia, a partir de los trabajos de los sumerios no semíticos, quienes se dieron cuenta de un número especial: $\pi$, al que le asignaron un valor equivalente a 3. También inventaron una manera de representación de las ideas a través de escritura cuneiforme sobre tablillas de arcilla (Ilustración 12), alrededor del año 3300 ANE.

Ilustración 12: Escritura cuneiforme de los sumerios no semíticos

Aunque el pueblo sumerio fue absorbido por otras civilizaciones, ello no impidió que la astronomía y la aritmética siguieran progresando. Otro acontecimiento significativo en la prehistoria de las matemáticas, fue la invención práctica del Cero por civilizaciones distantes. Por una parte, se atribuye esta invención a los babilónicos aunque aún se discute si los hindúes fueron los primeros en utilizarlo. Lo que sí es seguro, es que el cero también fue inventado independientemente por la cultura Maya alrededor del año 200-600 de nuestra era (NE).

Mientras tanto, en Egipto se había llegado a establecer el valor de $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4$ y que aproximaron a 3.16.

El empirismo práctico de los agrimensores que parcelaban los campos del antiguo Egipto (Bell, 2010), les permitió la construcción de la Gran Pirámide (Ilustración 13) alrededor del año 2570 ANE.

Ilustración 13: La Gran Pirámide

Un poco después, alrededor del año 1890 ANE., un escribano egipcio, registró en un papiro 25 problemas matemáticos. De éstos, llama la atención el problema 14 que pide calcular el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrangular. Este matemático egipcio, describe un ejemplo numérico de una fórmula que en notación moderna se expresa: $\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$, donde $h$ es la altura del tronco, $a$ la longitud del lado superior y $b$ la longitud del lado inferior. Este papiro se conoce actualmente como el papiro de Moscú (ilustración 14) y permite una interpretación sobre la manera en que los egipcios concibieron la construcción de la Gran Pirámide.

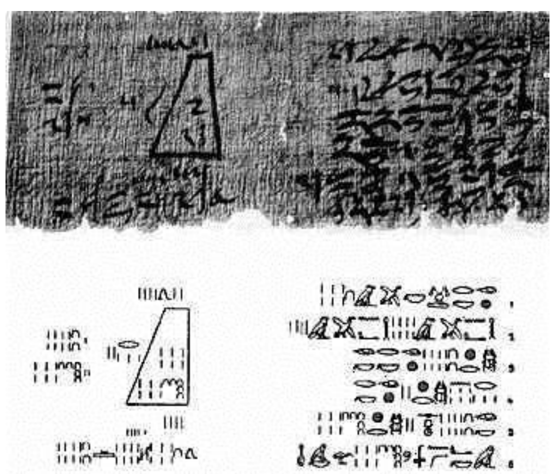


Ilustración 14: Papiro de Moscú.

Los babilónicos tuvieron más aportaciones significativas a las matemáticas. Desarrollaron un álgebra sin simbolismos hacia el año 2000 ANE., de carácter empírico. En su medición de los sólidos, daban soluciones correctas a problemas numéricos en los que intervenían paralelepípedos, cilindros rectos y prismas rectos con base trapezoidal. También llevaron a tal precisión su astronomía que sus cálculos permitieron al astrónomo Kidinnu el descubrimiento de la precesión de los equinoccios y la descripción de la trayectoria de la Luna en el año 340 ANE.

Un acontecimiento importante que se ha conservado hasta la actualidad, es la escritura de un papiro por Ahmes alrededor del año 1600 ANE, a partir de conocimientos que datan del 2000 ANE al 1800 ANE. Este documento es conocido ahora como el papiro Rhind y contiene el registro de 87 problemas matemáticos de la época (Ilustración 15).

Ilustración 15: Papiro Rhind.

Hasta este momento, las aportaciones empíricas de Babilonia y Egipto habían bifurcado el desarrollo de las matemáticas en dos corrientes: el número y la forma.

Uno de los lugares geométricos al que el currículum otorga mayor importancia es la elipse. Los primeros vestigios de esta curva pueden obtenerse del trazado sobre una pared del Templo de Louxor, del Egipto antiguo (Borchardt, 1896). (Ilustración 16)

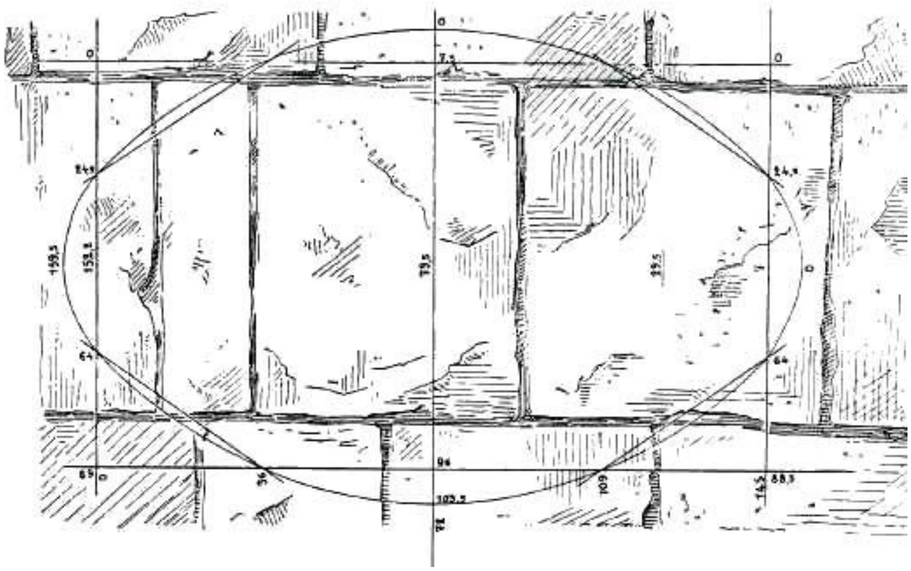


Ilustración 16: Elipse de Louxor

Esta curva fue estudiada inicialmente por Menecmo, Euclides y Apolonio de Perga, quien le da ese nombre y la describe como una de las curvas cónicas.

## La aportación Griega

Fueron los griegos quienes establecieron la demostración a través del razonamiento deductivo como una base para las estructuras del número y la forma. También diseminaron la idea Pitagórica de que la naturaleza sólo puede ser comprendida a través de las matemáticas, pues es este el lenguaje más apropiado para idealizar la complejidad de la naturaleza y reducirla a una sencillez comprensible (Bell, 2010).

La historia de las matemáticas griegas comienza con Thales de Mileto  y Pitágoras de Samos en los siglos VI-V ANE. Tiempo después, Eudoxio de Cnidos (408-355 ANE), refutó algunas objeciones de los sofistas, y fue discípulo y amigo de Platón (429-348 ANE). En este contexto, se debe subrayar que para un geómetra platónico, solo en el mundo de las ideas el círculo es más redondo que cualquier otra curva  y que no hay una idea más recta que la línea recta ideal de ese mismo mundo. De ahí que las construcciones terrenales deben limitarse a un compás y una regla. Esta posición da pauta al planteamiento de los problemas clásicos:

- Problema uno. Trisección del ángulo.
- Problema dos. Construir el lado de un cubo cuyo volumen sea doble del de otro dado.
- Problema tres. Construir un cuadrado de igual área que un círculo dado.
- Problema cuatro. Deducir el quinto postulado de Euclides de los otros.

Los primeros tres problemas desafiaron la inventiva de los matemáticos durante dos mil años, pues revelaron dificultades fundamentales que hicieron necesario afinar el concepto de número. El cuarto problema propició infructuosos intentos por 2300 años hasta que finalmente propició un gran progreso en la metodología matemática.

En el siglo V ANE, Hipócrates de Chíos, demostró la fuerza del método indirecto conocido como reducción a lo absurdo (*reductio ad absurdum*).

Fue Euclides (325-265 ANE) quien sistematizó la geometría griega de su tiempo y formalizó un rígido sistema deductivo a partir de la geometría plana elemental y la geometría sólida sintética. Los *Elementos*, muestran ya una geometría sintética y métrica.

Por su parte, Arquímedes (287-212 ANE), fue el matemático más productivo de la antigua Grecia; pues a diferencia de los matemáticos de su época, no desdeñó la experimentación. Fundó ciencias matemáticas como la hidrostática y la estática. Se anticipó al cálculo diferencial e integral. Usó el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola, y definió una espiral que hoy conocemos con su nombre.

Fue entre los años 260-200 ANE cuando Apolonio de Perga desarrolló el método sintético en la geometría métrica de las cónicas e introdujo los términos *parábola*, *elipse* e *hipérbola espiral*. Por su parte Eratóstenes (276-194 ANE), impulsó la geodesia con una asombrosa aproximación al tamaño de la Tierra de acuerdo a los instrumentos disponibles en ese momento. Inventó un método para cribar los números primos de la serie de todos los números enteros. Mientras, las aportaciones de Hiparco de Rodas (190-120 ANE), convirtió a la astronomía en una ciencia matemática. También empleó una especie de trigonometría y produjo un equivalente a una tabla de senos.

A Herón de Alejandría (10-70 NE), se le atribuye la fórmula $[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$ para el área de un triángulo de lados $a$, $b$ y $c$ y $2s \equiv a+b+c$, que resulta de suma importancia para la trigonometría. Mientras, en la escena griega se aguardaba una aportación de Claudio Ptolomeo (100-170 NE), quien estableció un modelo geocéntrico del universo a través de sus epiciclos y deferentes.

Finalmente, Diofanto de Alejandría (200-284 NE) escribió un tratado de trece libros. Su trabajo sobre la solución en números enteros o racionales de ecuaciones indeterminadas, creó el interés de Fermat para la creación de la aritmética superior.

## Los tres problemas clásicos

De los tres problemas clásicos griegos, el de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, tienen bastante importancia histórica.

### La cuadratriz de Hippias

De acuerdo a la matemática moderna, el problema de la cuadratura del círculo, depende de si $\pi$ es algebraico o trascendente. La trascendencia de $\pi$ fue demostrada por el matemático alemán Ferdinand von Lindemann en 1882 (Beckmann, 2006; pág. 148), y es el teorema de Lindemann el que demuestra que es imposible de cuadrar el círculo siguiendo las reglas de la geometría griega.

Sin embargo, alrededor del año V ANE, Hippias de Élide construyó una curva llamada ***cuadratriz***, nombre que significa *formadora de cuadros*, que resuelve el problema de la cuadratura del círculo. Pero esta demostración se atribuye a Dinostrato. (Morales, 2002)

La **cuadratriz de Hippias** se define *cinemáticamente*, como el ***lugar geométrico*** de los puntos que son intersección de dos rectas que cumplen las siguientes condiciones:

- Una recta es horizontal y se mueve a velocidad constante en dirección vertical.
- Otra recta gira con velocidad constante.
- En el instante inicial ambas rectas son perpendiculares y en el instante final coinciden. (Ilustración 17)

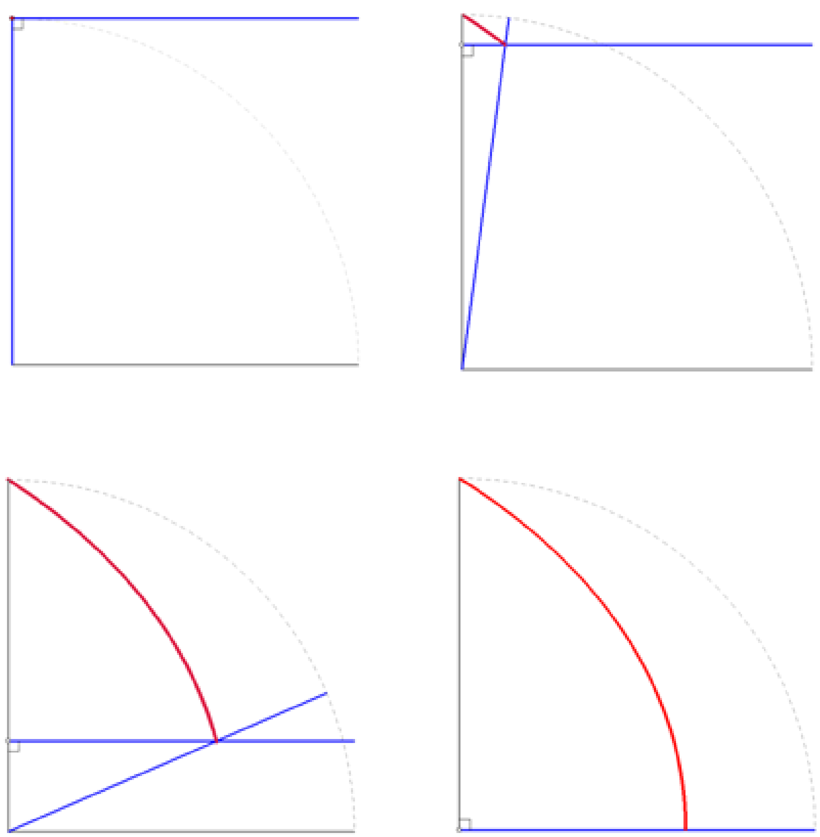


**Ilustración 17: Generación cinemática de la cuadratriz de Hippias. En el primer cuadro, ambos segmentos son perpendiculares; en el segundo cuadro, se muestra el avance constante de ambos segmentos. En el tercer cuadro, se vislumbra la curva que genera la intersección de los segmentos. En el cuarto cuadro, que es la posición límite de ambos segmentos, se presenta ya la cuadratriz.**

La cuadratriz de Hippias[1] (ilustración 18) resuelve el problema de la trisección del ángulo, como se muestra a continuación:

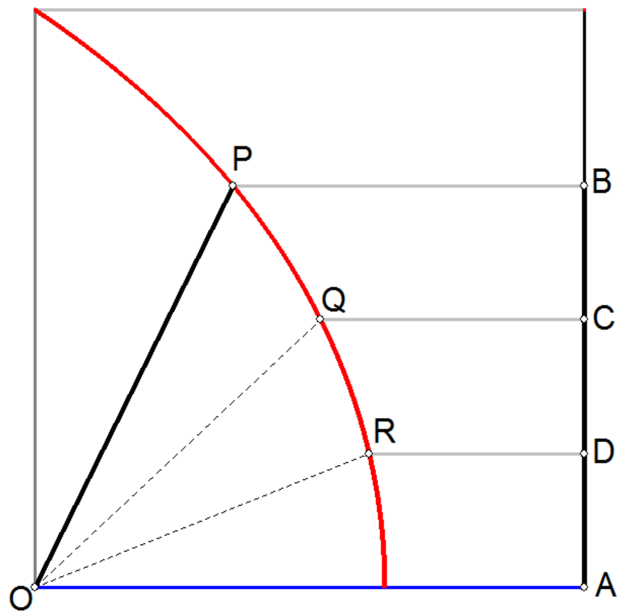



Ilustración 18: La cuadratriz de Hippias en la trisección del ángulo.

La curva $PQR$ es la cuadratriz de Hippias que resulta de la construcción cinemática descrita anteriormente. Dado un punto $P$ sobre la cuadratriz, se determina el ángulo $AOP$ a trisecar. Se traza una paralela a $OA$ por $P$ cuya intersección $B$ con el rayo $AB$, determina el segmento $AB$ que pude dividirse con regla y compás, en tres partes iguales. Sean $C$ y $D$ los puntos de trisección del segmento $AB$. Las paralelas a $OA$ por $C$ y $D$, cortan a la cuadratriz en $Q$ y $R$ respectivamente.

Loa ángulos $ROA$, $QOR$ y $POQ$ son iguales, es decir, se ha trisecado el ángulo original. De hecho la cuadratriz permite dividir el ángulo $AOP$ en cualquier cantidad de ángulos iguales, usando el Teorema de Tales sobre el segmento $AB$ para dividirlos en tantas partes como se desee.

[1] En adelante, el ícono hará referencia a que en la versión digital de este documento, la construcción puede descargarse para su exploración, pulsando sobre la ilustración. Para descargar el interactivo inserto en una presentación power point, pulse el ícono azul.

La cuadratriz de Hippias también resuelve el problema de la cuadratura del círculo. Teniendo en cuenta el círculo unitario y dado que el pie de la cuadratriz dista $\frac{2}{\pi}$ unidades de $O$, por el Teorema de Thales, y como se muestra en la ilustración 19, $\frac{\frac{2}{\pi}}{1} = \frac{OA}{OB}$, de donde $OB = \frac{\pi}{2}$. Tomando OB como radio, se traza un arco para obtener el punto Q. A partir de este punto, se agregan dos unidades para obtener S, cuya distancia al punto O es $\frac{\pi}{2} + 2$

Se traza una semicircunferencia que pase por O y S y se levanta una perpendicular por Q que la intersecte. En esta ocasión se cumple que $\frac{OQ}{QC} = \frac{QC}{QS}$, lo que implica que $\frac{\frac{\pi}{2}}{QC} = \frac{QC}{2}$, es decir, $QC = \sqrt{\pi}$, es decir que el área del cuadrado de lado QC es igual a la del círculo unitario.

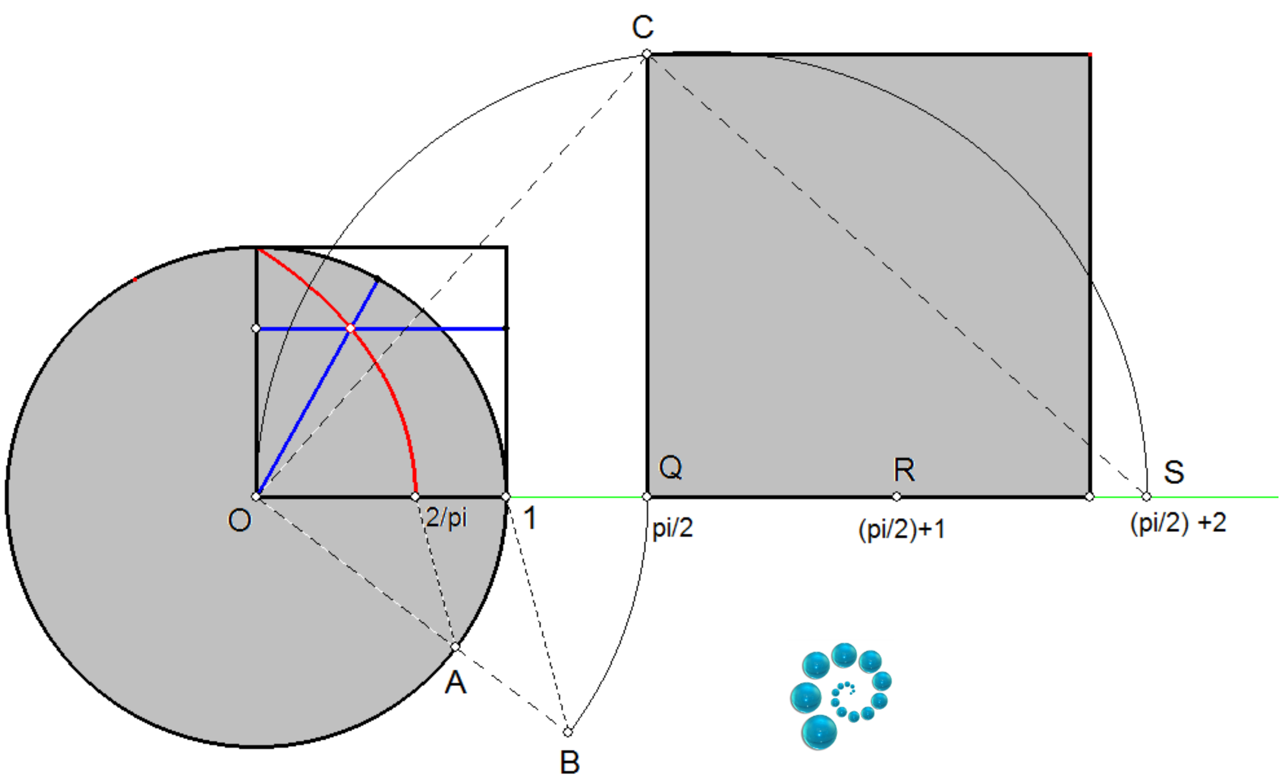



Ilustración 19: Cuadratura del círculo con la cuadratriz de Hippias

### La Concoide de Nicomedes

La **concoide de Nicomedes** (siglo II ANE) es una curva que se construye de la siguiente manera: se toma una recta $r$ y un punto $O$ exterior a ella. Dado $k > 0$, se traza una recta $s$ que pase por $O$ y no sea paralela a $r$. Con centro en el punto $P$ de intersección de $r$ y $s$, se traza una circunferencia de radio $k$, que corta a $s$ en los puntos $A$ y $B$. El ***lugar geométrico*** de $A$ y $B$ es la concoide de Nicomedes de polo $O$, directriz $r$ y constante $k$. (Ilustración 20)

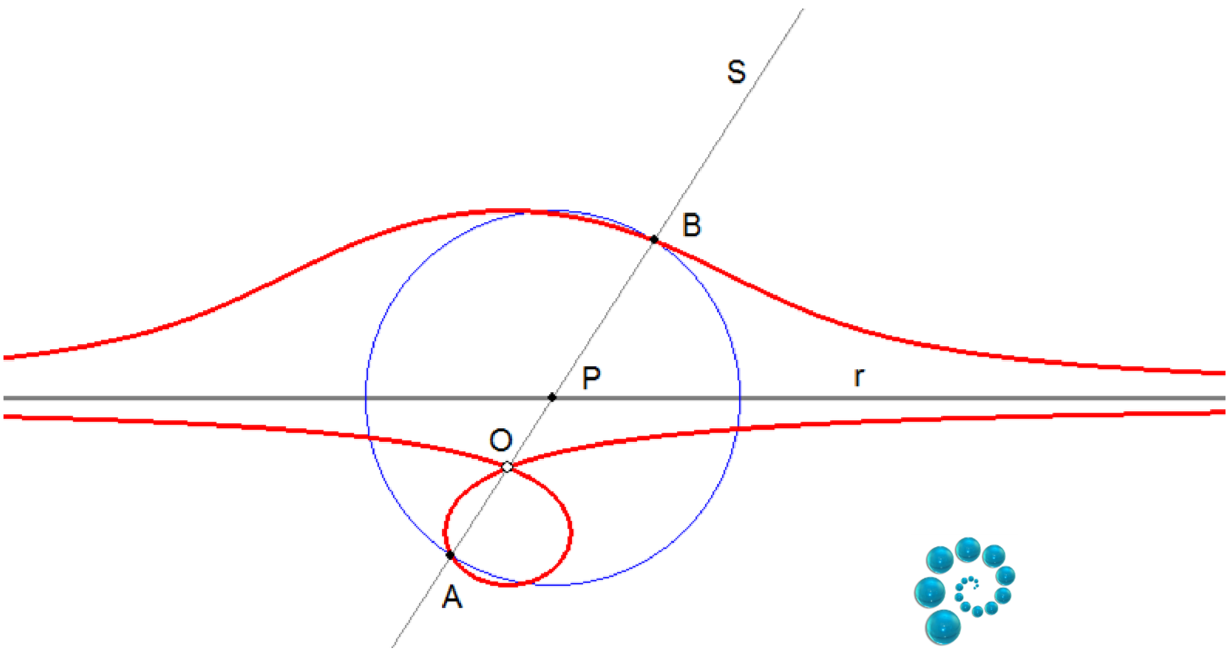



Ilustración 20: Concoide de Nicomedes

La concoide de Nicomedes resuelve la trisección del ángulo. Sea el ángulo $MON$ el que se quiere trisecar. (Ilustración 21)

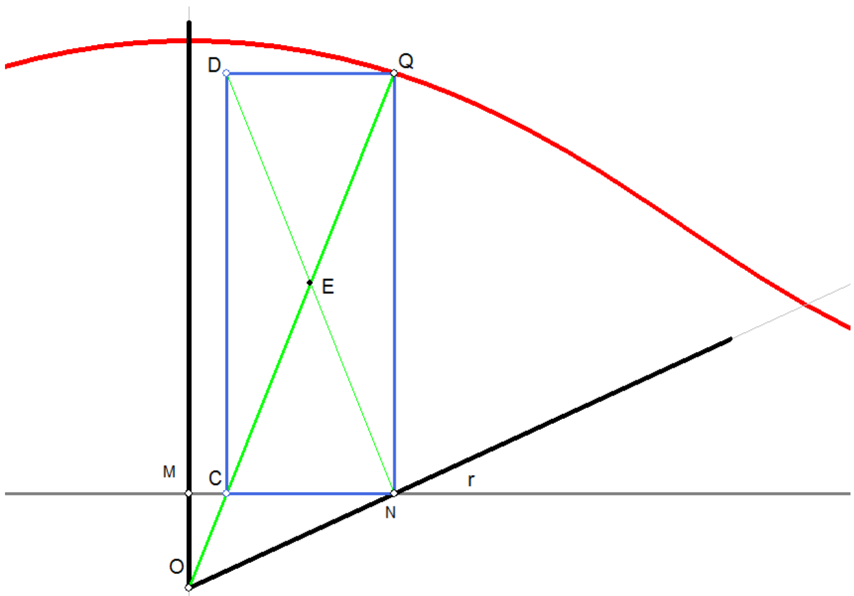



Ilustración 21:Concoide de Nicomedes  y la trisección del ángulo

La curva roja es la concoide de Nicomedes, cuando $MN$ es la directriz, $O$ el punto externo, $OM$ perpendicular a $MN$, y $k = 2\ ON$

Se construye una perpendicular a $MN$ por $N$, cuya intersección con la concoide es $Q$. La intersección de $OQ$ con $MN$ es $C$, lo que permite construir el rectángulo $CDQN$, cuyas diagonales son $DN$ y $QC$ y $E$ la intersección de éstas.

Como $CQ = k = 2ON$, donde $E$ es el centro del rectángulo $CDQN$, se tiene que $NE = CE = \frac{1}{2}CQ = ON$, lo que demuestra que el triángulo $ONE$ es isósceles, donde $< OEN =< EON$

Por otra parte, el triángulo $EDC$ también es isósceles, donde $< NEC\ =< EDC +< ECD$, pues $NEC$ es un ángulo externo.

Como $DC$ es paralela a $OM$, entonces $< DCE =< MOC$, por lo que $< EON = 2 < MOC$ y el ángulo ha sido trisecado.

### La Cisoide de Diocles

La **cisoide de Diocles** (siglo II ANE) se construye a partir de una circunferencia $C$, y un punto A sobre ella. Se traza una tangente a la circunferencia que pase por $M$, quien es diametralmente opuesto al punto $A$.

Por este punto $A$ se traza una secante a la circunferencia que corta a esta en $Q$ y a la tangente en $B$. Se determina un punto $P$ sobre la secante, de manera que $AP = QB$; el **lugar geométrico** de $P$ cuando $Q$ se desplaza por la circunferencia es la cisoide de Diocles. (Ilustración 22).

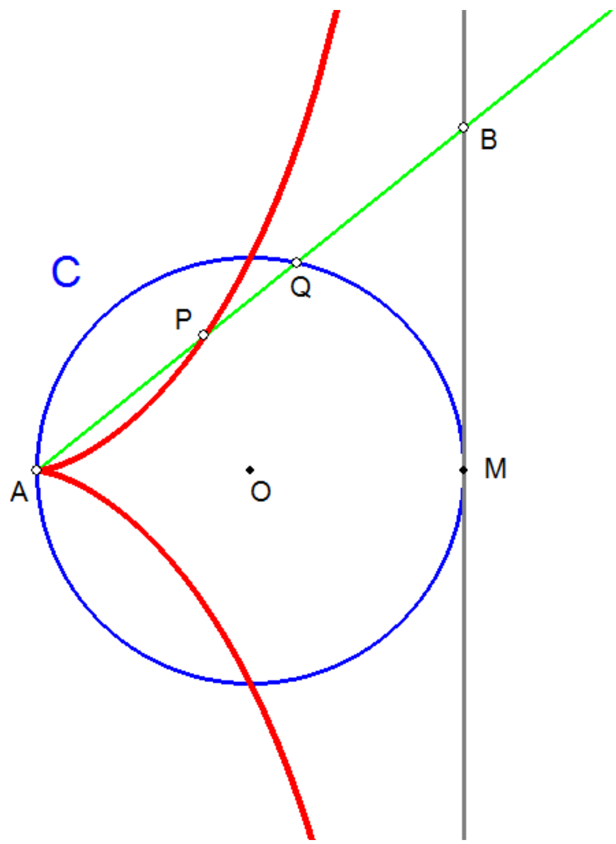



Ilustración 22: Cisoide de Diocles

La cisoide puede emplearse para resolver el problema de la duplicación del cubo ((Bell, 2010; pág. 89).

Tómese $AD$ paralela a la tangente en $M$, de manera que $AD = 2AM$, entonces la recta $DM$ corta a la cisoide en $E$ y la recta $AE$ corta a la tangente en $N$. (Ilustración 23)

Aunque no se describirá en este documento, es posible demostrar que $MN = \sqrt[3]{2}AM$, es decir, que $MN^3 = 2\,AM^3$, lo que permite duplicar el volumen de un cubo dado.

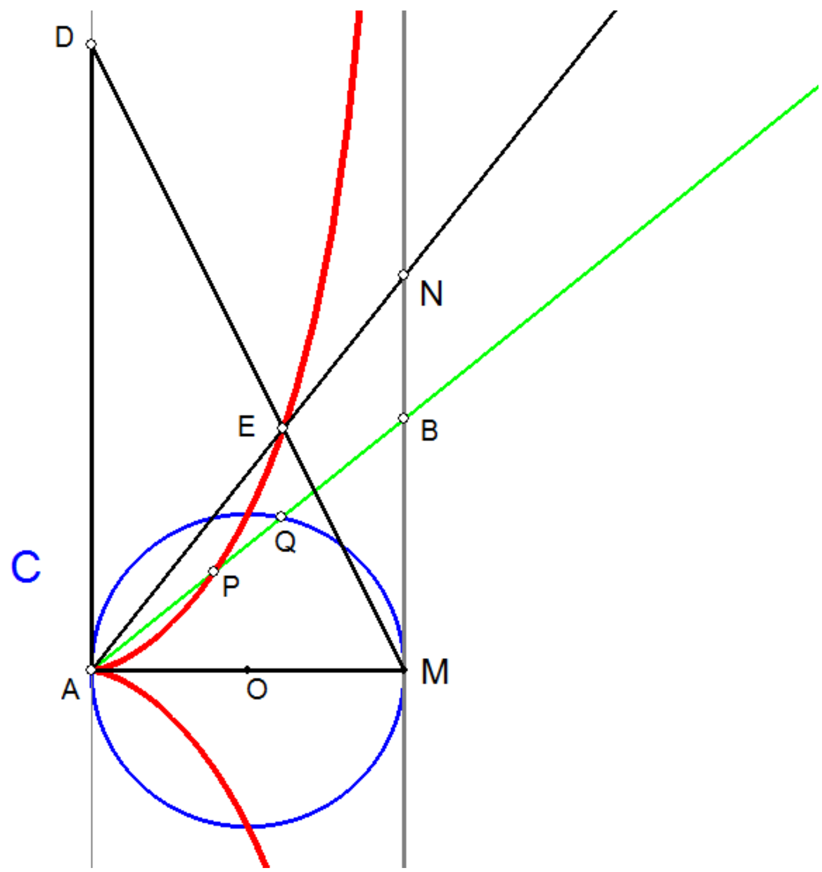



Ilustración 23: Duplicación del cubo

### La hipérbola de Pappus

En el año 340, **Pappus de Alejandría** utiliza su **hipérbola equilátera** para la trisección del ángulo. La construcción es la siguiente:

Dado un segmento $AB$ con $M$ su punto medio y mediatriz $m$, se trazan dos circunferencias: una con centro en $A$ y radio $AM$, mientras que la otra con centro $B$ y radio $BM$.

Sea $C$ un punto sobre la circunferencia con centro en $A$. Se traza una tercer circunferencia con centro en $C$ y radio $CM$ y se nombra $D$ a su otra intersección con la primer circunferencia. El punto $E$ se define como el simétrico de $D$ con respecto a $m$.

Se trazan las semirrectas $AC$ y $BE$ cuya intersección es $P$. Definimos $Q$ como el simétrico de $P$ con respecto a m.

El lugar geométrico de $P$ y $Q$ cuando se mueve $C$, es la **hipérbola de Pappus**. (Ilustración 24)

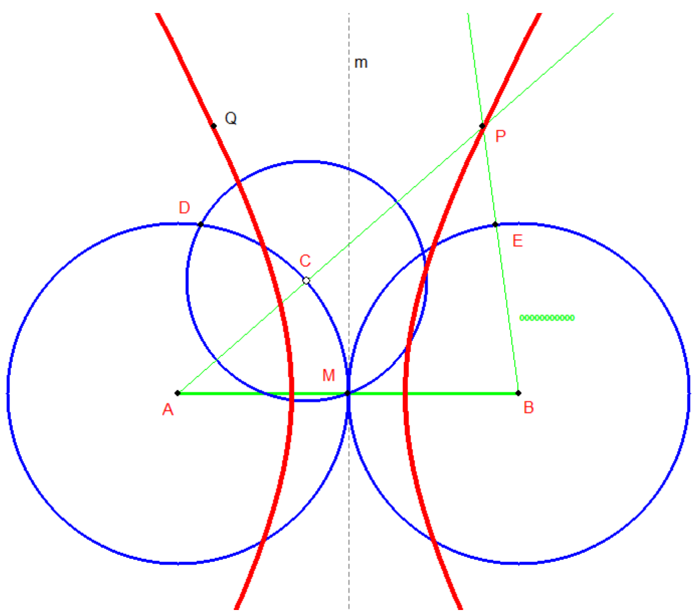



Ilustración 24: Hipérbola de Pappus

Hay que observar que el arco $CD$ y el arco $CM$ son iguales, por lo que $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAM$; es decir, que $\sphericalangle DAM = 2\sphericalangle CAM$. Pero $E$ es el simétrico del punto $D$, por lo que se cumple que $\sphericalangle PBA = 2\sphericalangle PAB$

Sean $n$ y $l$ las mediatrices de los segmentos $AP$ y $PB$ respectivamente y $H$ su intersección. (Ilustración 25)

La circunferencia con centro en H y radio HP, muestra que $AH = PH = BH$ porque $n$ y $l$ fueron definidos como mediatrices. Además los ángulos $PBA$ y $PAB$ son inscritos en este mismo círculo con $\sphericalangle PBA = 2\sphericalangle PAB$

Entonces se cumple que $\sphericalangle PHA = 2\sphericalangle PHB$, es decir el ángulo $AHB$ ha sido trisecado.

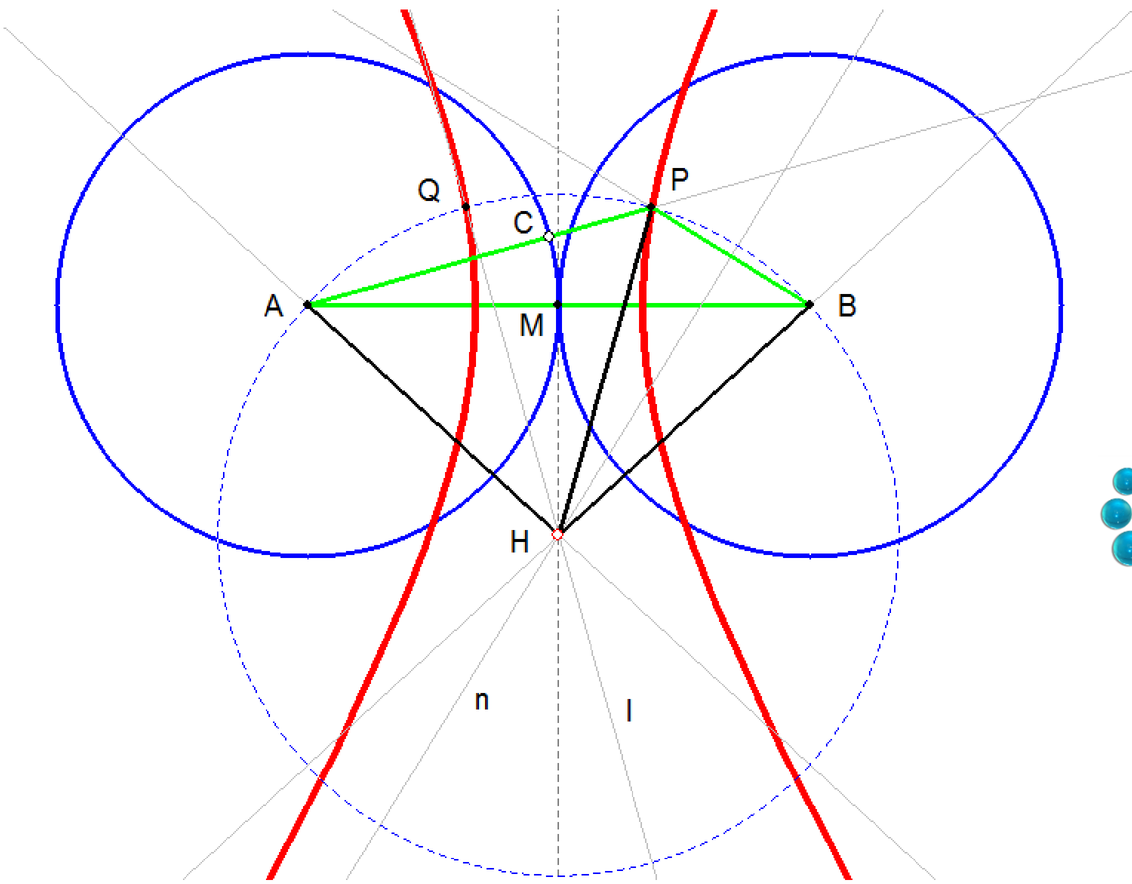



Ilustración 25: Trisección

### La espiral de Arquímedes

Arquímedes de Siracusa ideó la siguiente construcción:

> *"Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral"* (Ilustración 26)

La espiral Arquimediana es aquella en la que el radio varía de forma proporcional al ángulo girado. Este notable matemático, define por primera vez en la historia de la humanidad, una curva mecánica basada en movimiento y de la cual hace un estudio exhaustivo en su obra **De las espirales**. Las propiedades descritas de esta curva, es un extraordinario avance para esta ciencia, y solo será retomado dos mil años después con el surgimiento del Cálculo Diferencial.

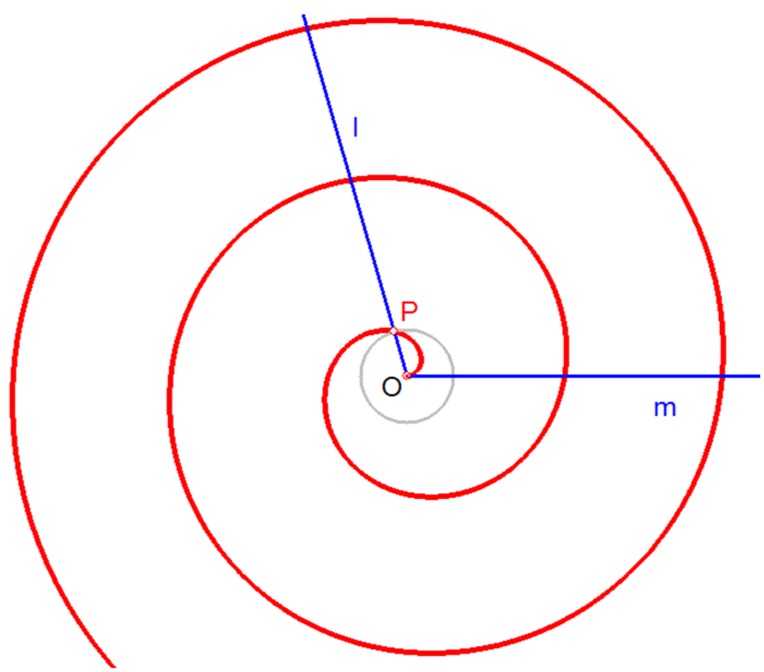



Ilustración 26: Espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes también resuelve el problema de la trisección del ángulo. Para ello, se toma un punto P sobre la espiral de Arquímedes como se muestra en la ilustración 28.

El segmento OP se divide en tres segmentos iguales, de manera que OA=AB=BP. Al trazar los círculos con centros en O y radios OA y OB, se obtienen sus intersecciones respectivas R y Q con la espiral.

El ángulo MON es la tercera parte del ángulo PON. (Ilustración 27)

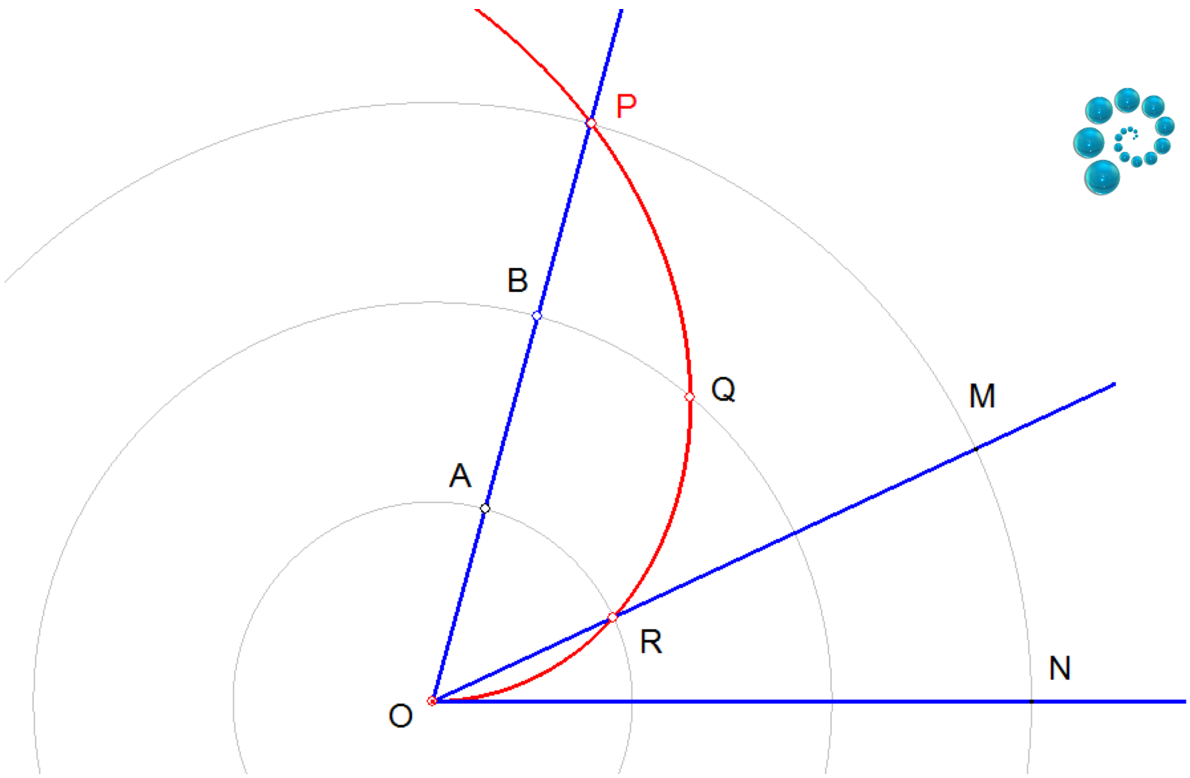


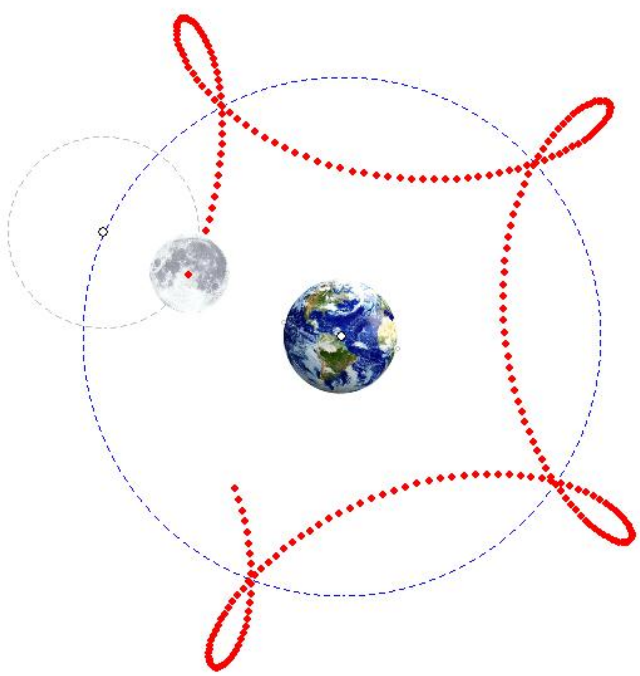
Ilustración 27: Trisección del ángulo con la espiral Arquimediana

## Otros lugares geométricos

Describiremos a continuación, algunas curvas que han surgido en el transcurso de la historia. No es el objetivo agotar el cúmulo de ejemplos que se han desarrollado, sino describir algunos cuyo contexto histórico aporten elementos de reflexión para este trabajo de investigación al ser trasladados a un ambiente dinámico.

### Los epiciclos y deferentes de Ptolomeo

Claudio Ptolomeo nació en Alejandría, cerca del año 85 de nuestra era. Este matemático, geógrafo, químico y astrónomo, explica el movimiento de los planetas respetando la idea de que solo pueden moverse en órbitas circulares. Su teoría plantea dos conceptos: los epiciclos y los deferentes. Un ***deferente*** es un círculo asignado a cada uno de los planetas, por lo que a la Tierra le corresponde uno también (aunque no necesariamente está en el centro de este círculo). Dado un punto A sobre el deferente, existe un círculo cuyo centro es A y que es descrito por el planeta que gira alrededor. (Ilustración 28)



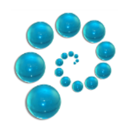


Ilustración 28: Epiciclo y deferente

## La versiera de Agnesi

María Gaetana Agnesi (1718-1799). Su obra más importante: *Instituciones Analíticas*, basado en un tratamiento didáctico sobre el cálculo diferencial e integral, fue traducido al inglés y francés. Una mala traducción de John Colson, un profesor de Cambridge al confundir el término empleado para la curva sinoidal versa "versiera", que en italiano significa "virar", girar", por "avversiera" que significa "bruja", "hechicera". Aún con el error declarado, las posteriores traducciones y ediciones, han mantenido para la historia de la matemática el término "bruja de Agnesi". (Ilustración 29)

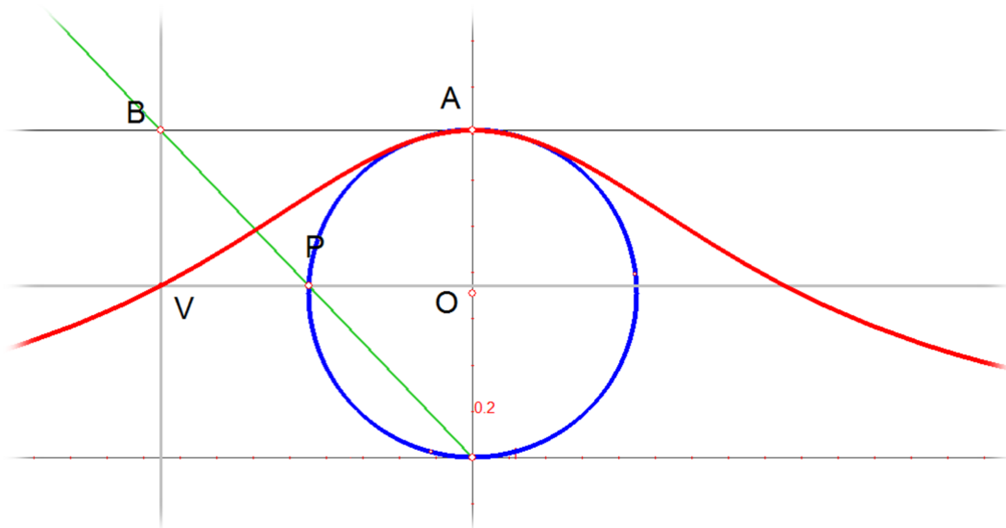



Ilustración 29: Versiera de Agnesi

## Lituus

El Lituus, creada por el matemático Roger Cotes en 1722, es el lugar geométrico de los puntos P de manera que el área de un sector circular permanece constante.

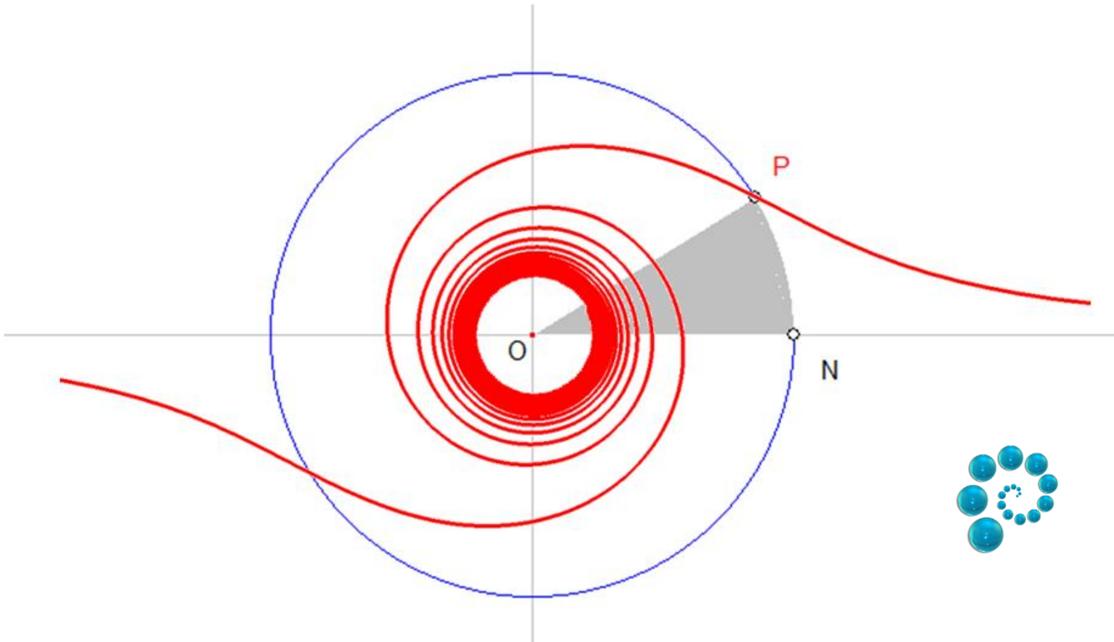



Ilustración 30: Lituus

**La curva de Wittgenstein**

En su libro, *Remarks on the foundations of mathematics*, Ludwing Wittgenstein plantea el siguiente mecanismo: mientras el punto A describe una circunferencia, el punto B describe una figura en forma de 8. (Wittgenstein, 1956)

El problema puede plantearse en términos de lugar geométrico de la siguiente manera. Sea un punto A sobre una circunferencia y u punto F ajeno a ella.

Sea un segmento de longitud constante AP contenida en la recta que asa por A y F. ¿Qué trayectoria describe P cuando A se desplaza por la circunferencia?

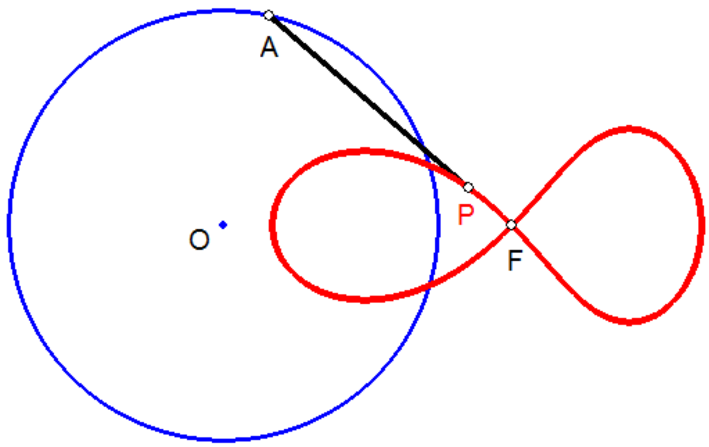



Ilustración 31: Curva de Wittgenstein

Se puede considerar al punto F como un pivote, y al hacer variar la longitud del segmento, el lugar geométrico que se obtiene se muestra en la ilustración 32:

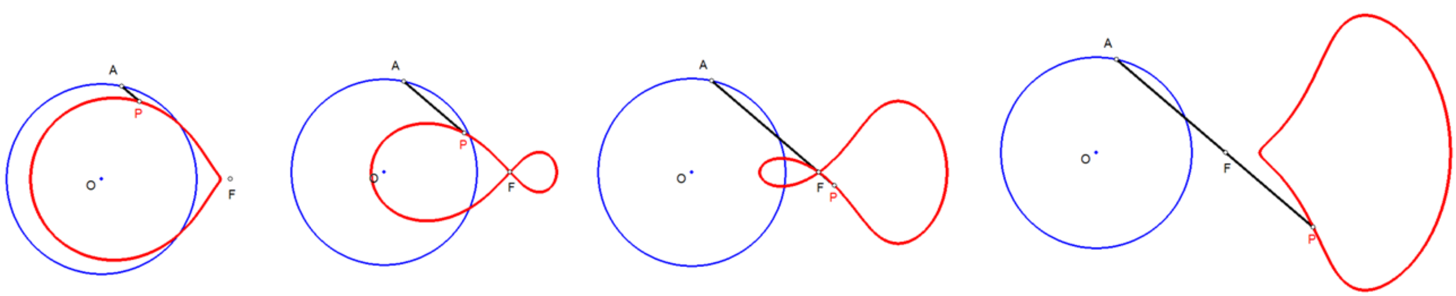



Ilustración 32: Variación en la longitud del segmento AP

Al variar la posición del pivote el efecto es como en la figura 33:

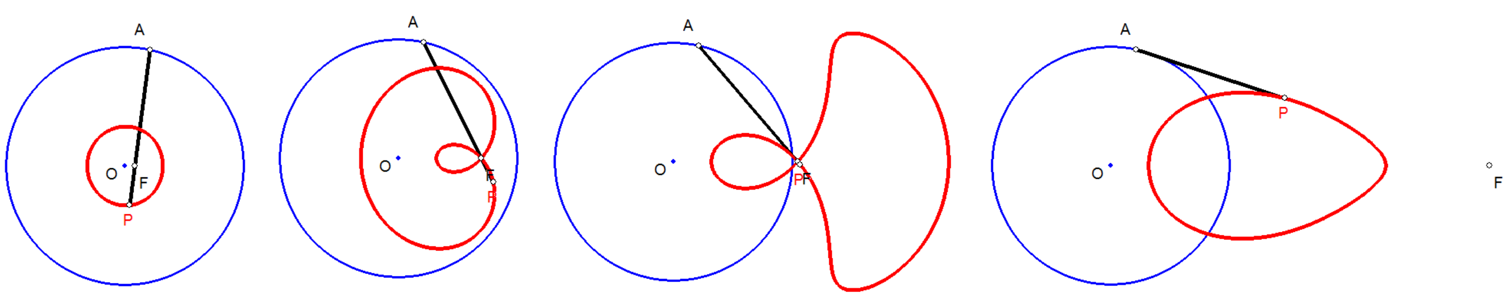



Ilustración 33: Efecto del movimiento del pivote

## Instrumentos matemáticos

### Máquinas de Van Schooten

A lo largo de la historia, han surgido esfuerzos por crear un instrumento matemático que permitiera el trazado de distintas curvas. Entre ellos se encuentra Frans Van Schooten (1615-1660), quien en 1646 crea un elipsógrafo. En la ilustración 34 se muestra el bosquejo de Schooten y una versión dinámica del instrumento.

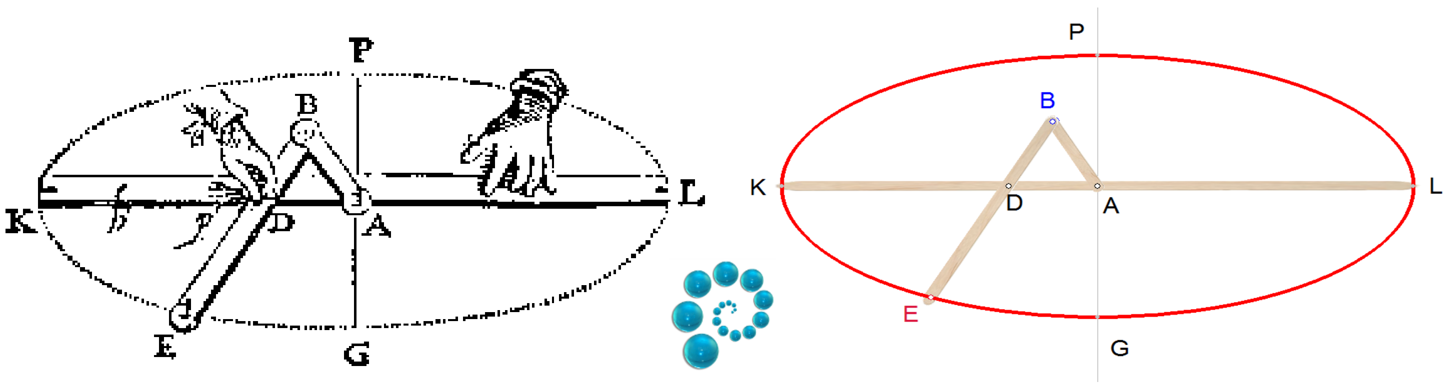



Ilustración 34: Elipsógrafo de Van Schooten

Van Schooten también ideó una máquina para trazar una parábola. (Ilustración 35)

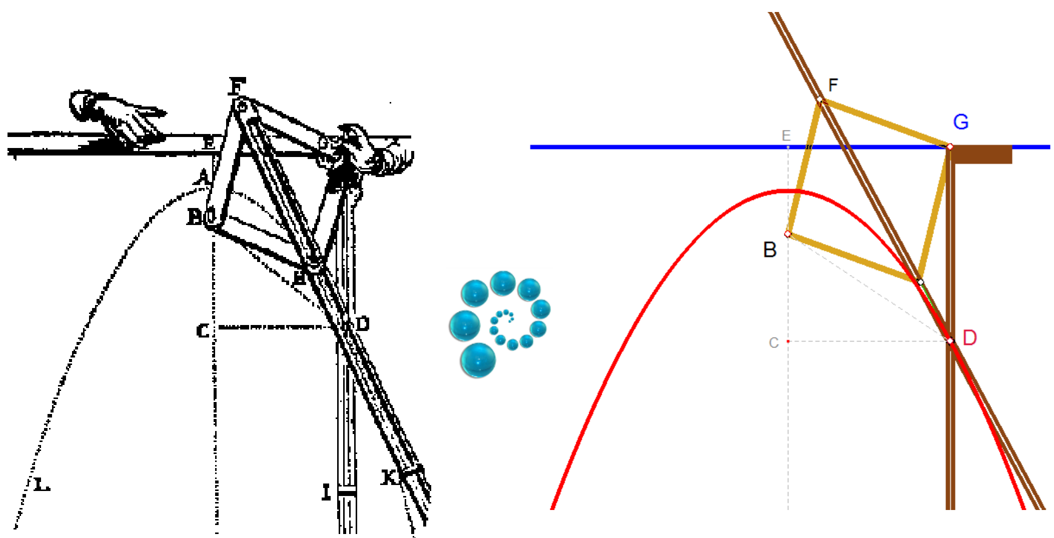



Ilustración 35: Parábola de Van Schooten

Y una más para trazar una rama de la hipérbola (Ilustración 36)

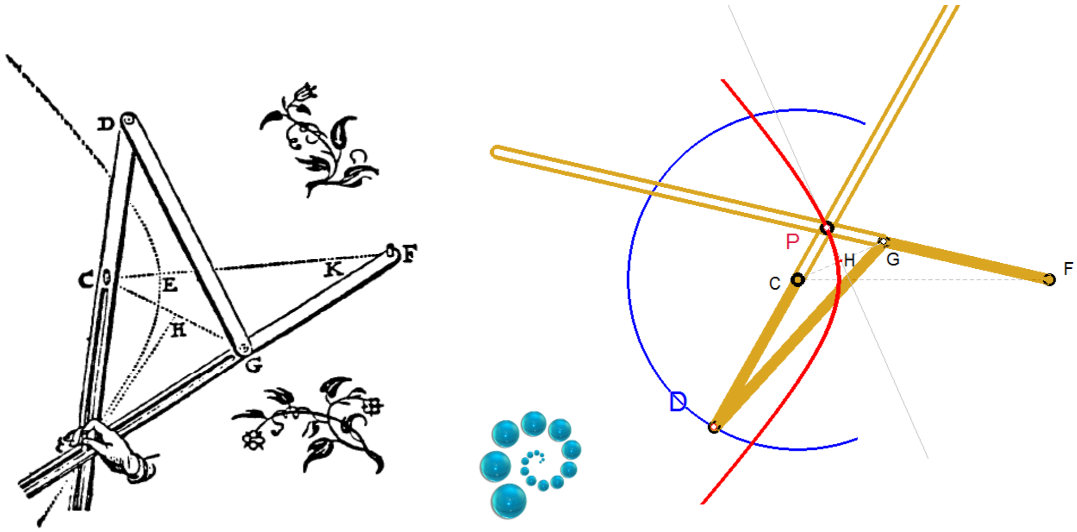



Ilustración 36: Hipérbola de Van Schooten

## El cuadrado en movimiento de Newton

Newton en sus “Arithmetica Universalis” propone algunas máquinas para trazar curvas. Uno de ellos es su *Moving Square*.

Sea un cuadrado QSRT que se mueve de tal manera que el vértice Q se desplaza por el eje vertical y la longitud del segmento OH es la misma que la de QK.

El punto K está construido de tal manera que una paralela al lado QS que pasa por k también pasa por H. (Ilustración 37)

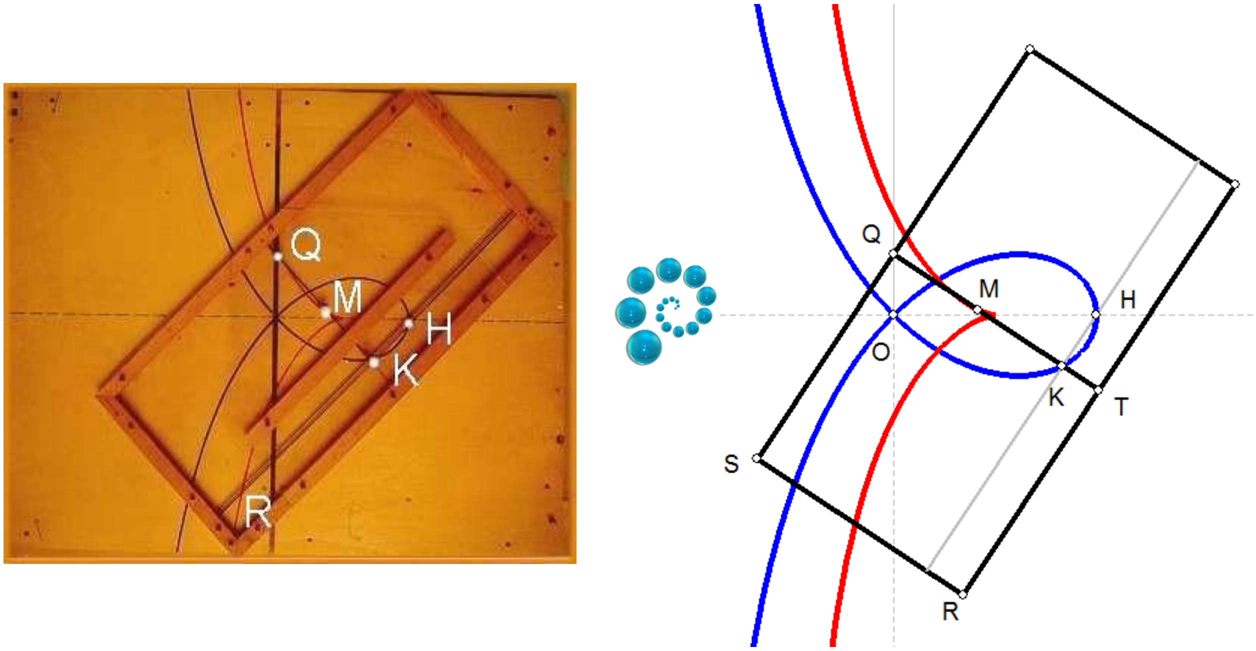



Ilustración 37: Moving Square

## La elipse de Da Vinci

Leonardo Da Vinci (1452-1519) diseño el siguiente elipsógrafo (Ilustración 38). Una recta que pasa por A y B, con A desplazándose sobre un segmento y B en otro perpendicular al primero. El punto P se determina dentro del segmento AB.

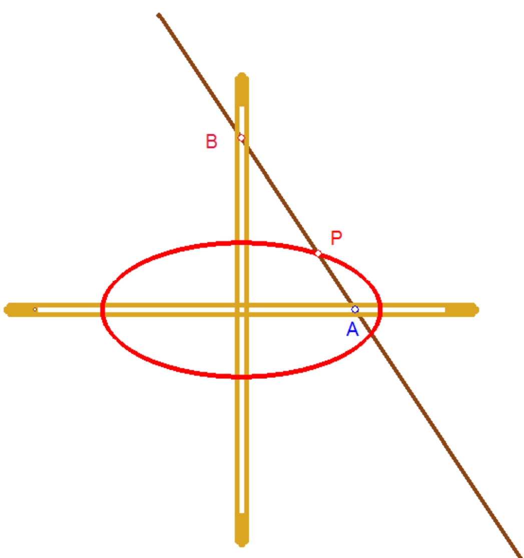



Ilustración 38: Elipse de Da Vinci

## La era digital

Un objeto matemático en su versión digital, dentro de un entorno dinámico adquiere nueva expresividad. Una construcción en **Cabri géomètre** (Cabri), por ejemplo, permite una exploración dinámica que ofrece la oportunidad al explorador, de observar relaciones, rasgos, y características insospechadas en muchos casos.

Ejemplificaremos una construcción: a partir de una circunferencia de centro $F_1$y radio $r$ (en la figura el radio es igual a la distancia $F_1T$) se define un punto arbitrario $F_2$, que serán los focos de la elipse. Dado un punto T sobre la circunferencia, se construye la mediatriz del segmento $F_2T$. A la intersección de esta mediatriz con el radio $F_1T$, se le denomina P. La trayectoria que sigue P cuando T se desplaza sobre la circunferencia es la elipse resaltada en rojo.

Cuando el foco $F_2$ se coloca fuera del círculo, la curva resaltada se transforma en una hipérbola. (Ilustración 39)

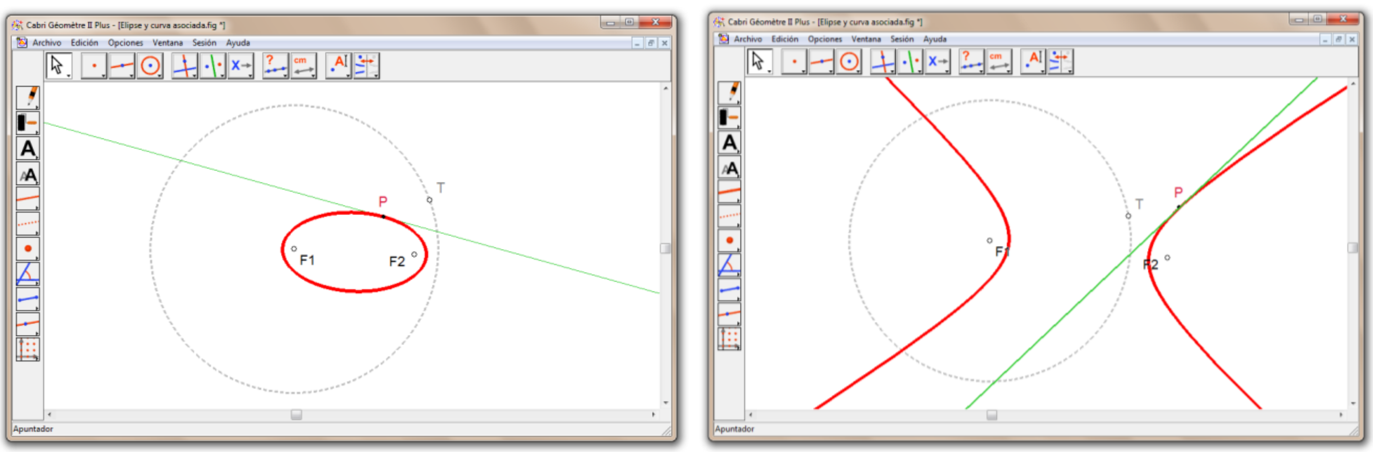



Ilustración 39: Hipérbola asociada a la construcción de la elipse

Una propiedad interesante de la construcción está en el hecho de que la mediatriz definida en la ilustración 3, resulta ser la tangente a la elipse en el punto P, y continua siéndolo de la hipérbola asociada.

Por otra parte, es posible resaltar la dimensión estética de una construcción geométrica con fines didácticos. Por ejemplo, un estudio informal de las cónicas puede hacerse a través de un interactivo diseñado en **geogebra**, donde los estudiantes arrastran los puntos (se presentan 5 puntos en total) y observan en tiempo real el efecto de la posición de cada balón en "la zona de chute" que en realidad es la cónica determinada. (Ilustración 40)

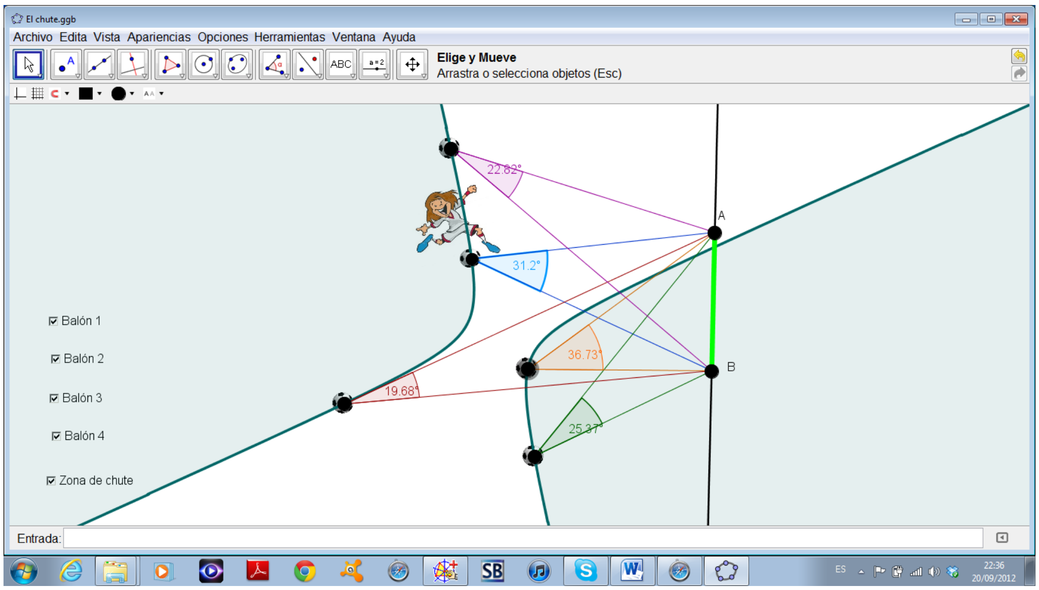



Ilustración 40: Exploración de las cónicas

# CAPÍTULO IV

# EL LOCUS COMO HERRAMIENTA DE MEDIACIÓN

## Introducción

El lugar geométrico también es una herramienta de mediación que permite explorar posibilidades de solución dentro de un marco de resolución de problemas. En este capítulo describiremos algunos usos del locus como mediador para analizar situaciones específicas que permiten elaborar conjeturas que conduzcan a la comprensión del problema y, por ende, a una solución sustentada en principios matemáticos.

**Problema 1: El anuncio espectacular**

Una persona camina sobre una calle recta mientras observa un anuncio espectacular. (Ilustración 41) ¿En qué posición obtendrá el mayor ángulo de visión?

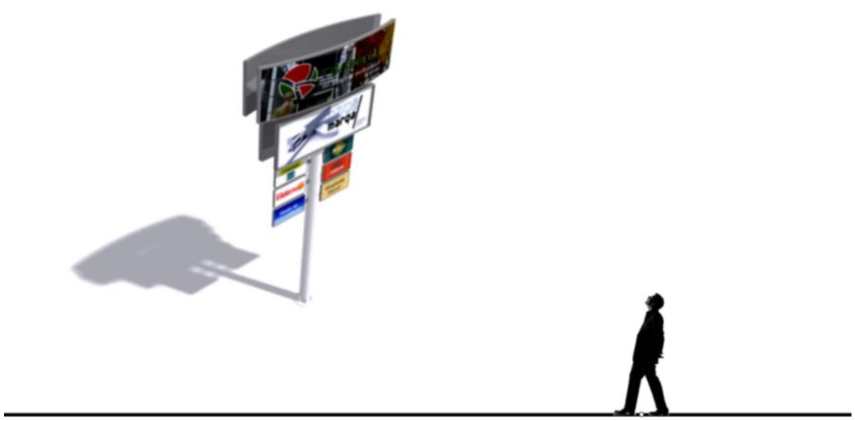


Ilustración 41: El anuncio espectacular

El ángulo de visión es una función de la posición del sujeto que observa. Algunos casos posibles hacen evidente la variación de este ángulo de visión. (Ilustración 42)

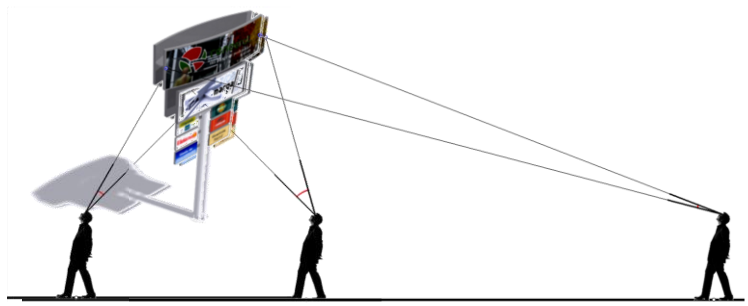


Ilustración 42: Ángulos de visión

Una manera de explorar la situación es a través de su modelación en un ambiente de geometría dinámica. Particularmente, el software Cabri ofrece una expresividad que puede dar luz sobre la solución. (Ilustración 43)

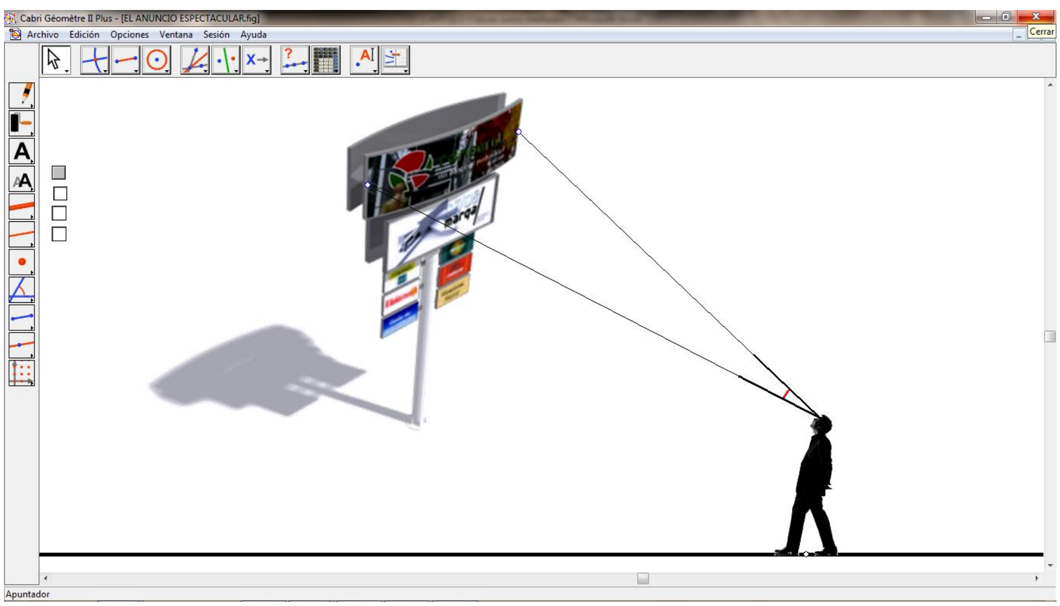



Ilustración 43: Exploración digital

Trazamos una paralela a la calle por el vértice del ángulo de visión. Una semirrecta por el mismo punto y perpendicular a la calle, permite trasladar el valor del ángulo de visión como un valor sobre este *eje cartesiano*.

La herramienta ***traza***, permite una visualización del lugar geométrico que representa la variación del ángulo de visión. (Ilustración 44)

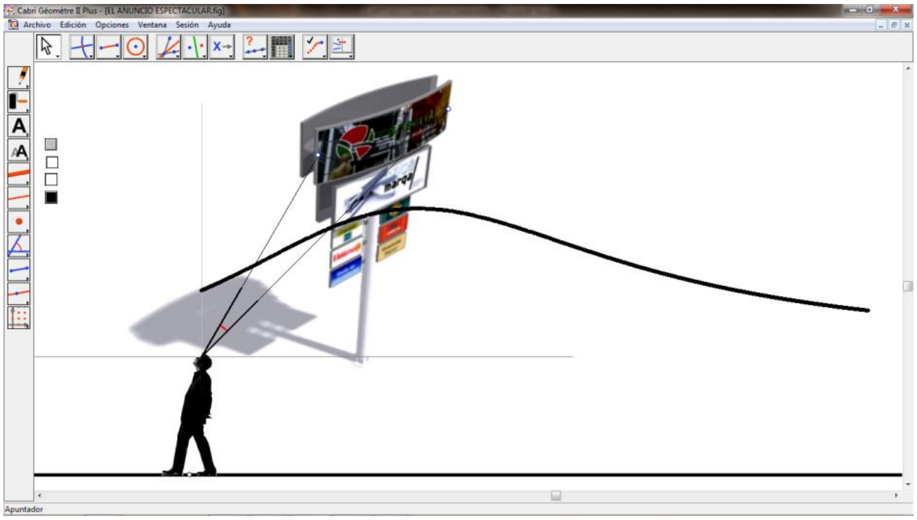


Ilustración 44: La traza

Este primer acercamiento, ofrece la posibilidad de ubicar la zona donde al ángulo de visión es mayor.

Al activar la herramienta locus, es posible obtener el lugar geométrico de todos estos valores del ángulo sobre la semirrecta, en función de la posición del sujeto. En este momento, no es necesario seguir visualizando el ángulo de visión, porque el locus nos muestra su comportamiento. (Ilustración 45)

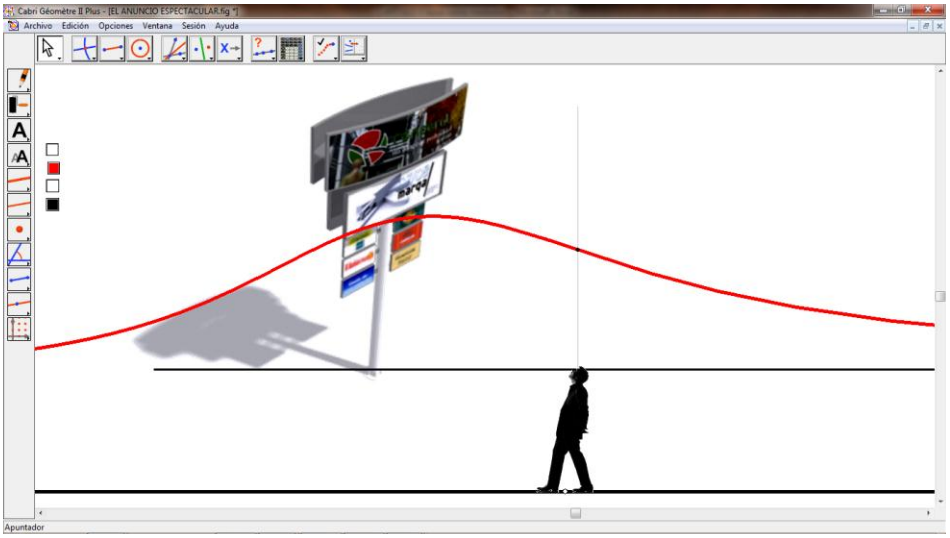


Ilustración 45: Locus

Es locus permite ubicar la silueta en una posición en que se alcanza un máximo local sobre la curva. (Ilustración 46). Es pues, una conjetura.

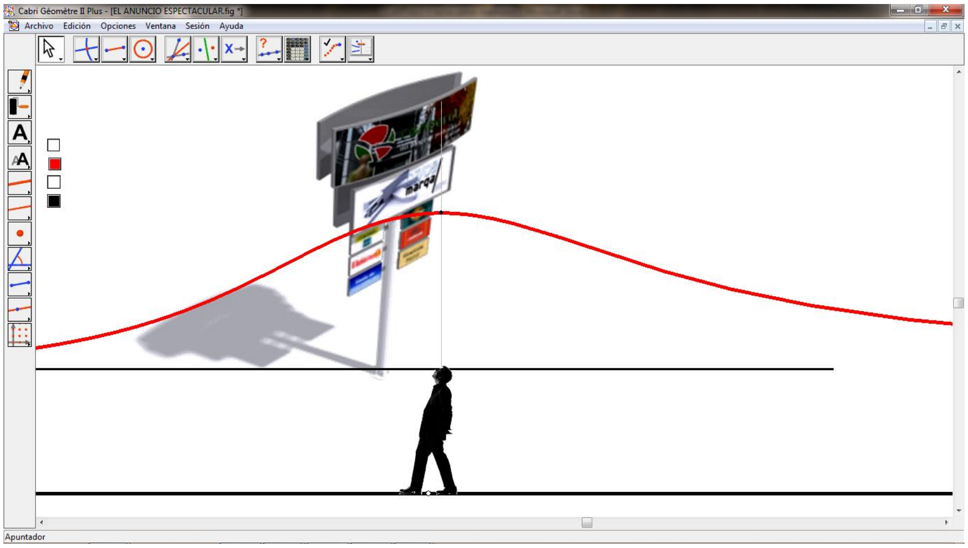



Ilustración 46: Conjetura

Es posible reconsiderar el problema observando que los extremos del anuncio espectacular y el vértice del ángulo de visión determina una circunferencia. (Ilustración 47)

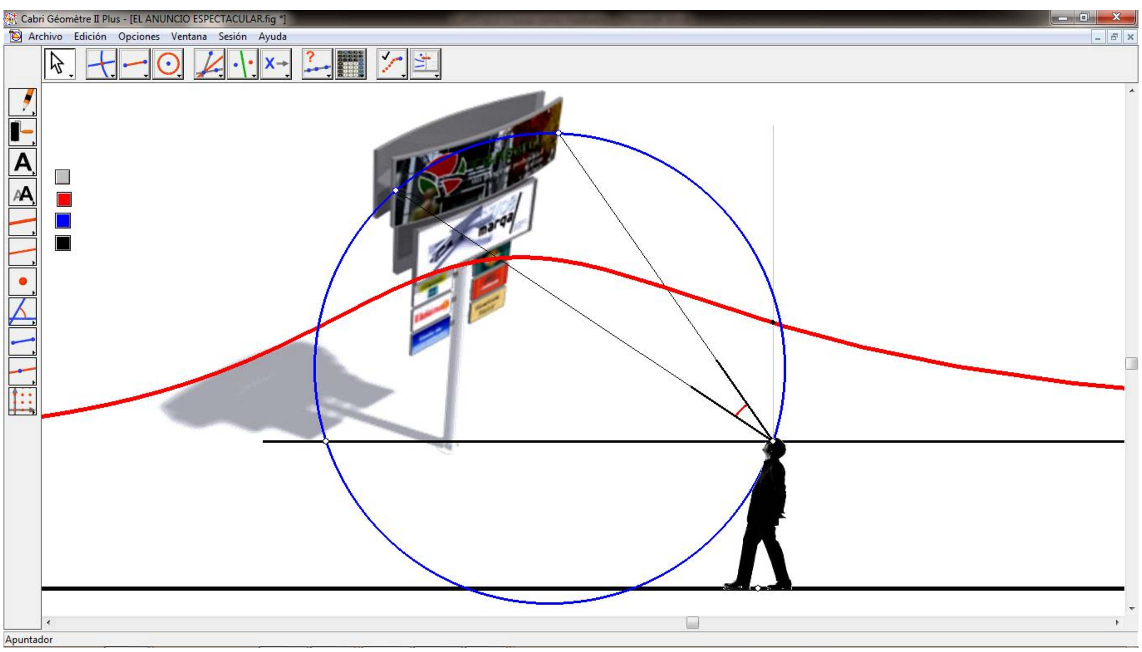



Ilustración 47: Ángulo inscrito

¿Qué sucede con esta circunferencia cuando nos acercamos al máximo sobre el locus? Esta es una pregunta que de manera natural atrae otra pregunta que arroje nuevos datos del problema.

Hay que notar que cuando la silueta se encuentra en una posición distinta al máximo relativo, la circunferencia corta a la recta paralela a la calle en dos puntos. Uno de ellos es el vértice del ángulo de visión. Es decir, que sobre la línea de visión (la recta paralela a la calle) hay en realidad dos puntos que determinan el mismo ángulo de visión.

Cuando nos acercamos al máximo de la curva, la cuerda que se determina con la intersección de la circunferencia con la línea de visión se hace muy pequeña hasta que la circunferencia se vuelve tangente a dicha línea. (Ilustración 48)

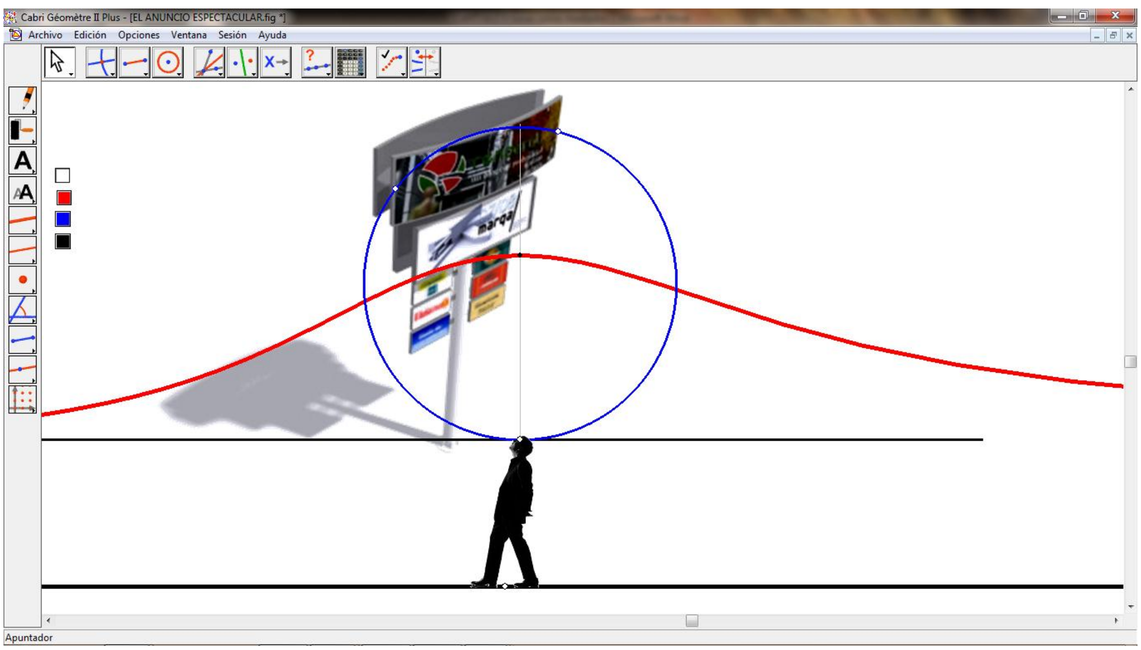



**Ilustración 48: Tangencia**

La tangencia de la circunferencia con la recta paralela a la calle es una manera de determinar la posición en que el ángulo de visión es el mayor.

**Problema 2: El área bajo la curva cicloide**

En 1630, Marín Mersene sugirió a la comunidad matemática, encontrar la cuadratura de la cicloide. Fue Gilles Personne de Roberval (1602-1657) quien lo demostró a través de calcular que el área contenida en un arco de cicloide es igual a tres veces el área del círculo que la genera.

El problema puede explorarse en Cabri, a través de las herramientas con que cuenta. Sea AB el segmento donde se hace girar al círculo generador. R es el punto de tangencia de la circunferencia con el segmento AB y P el punto cuya trayectoria es la cicloide. (Ilustración 49)

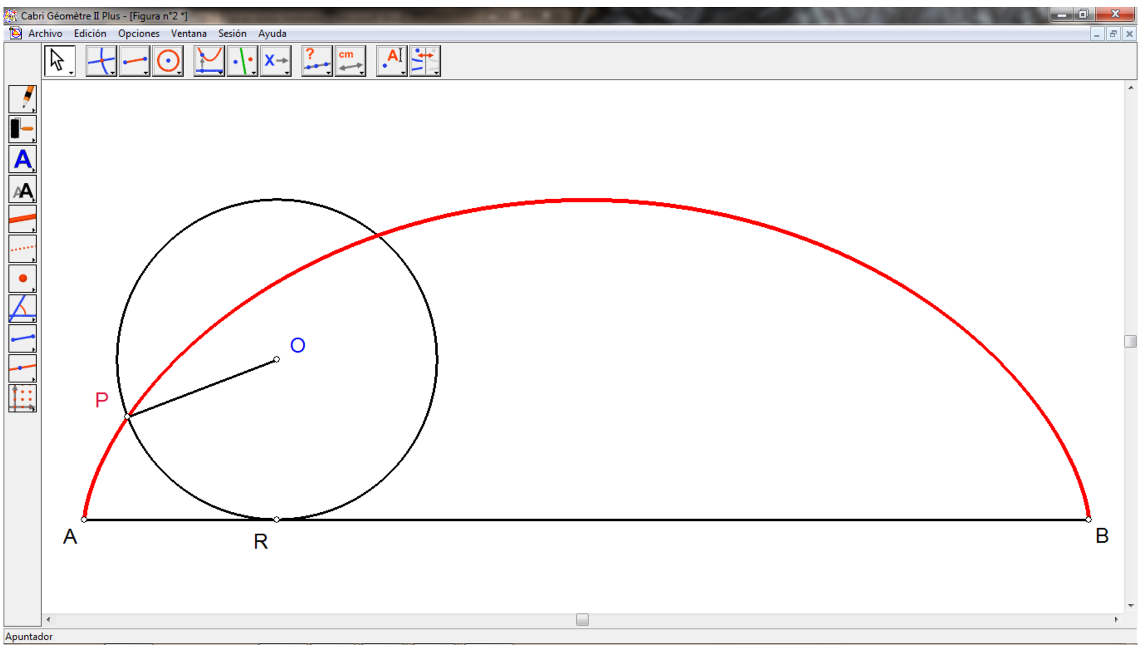



Ilustración 49: La Cicloide

Trazamos una paralela al segmento AB que pase por P y una perpendicular a AB que pase por R. La intersección de ambas rectas será el punto Q. (Ilustración 50)

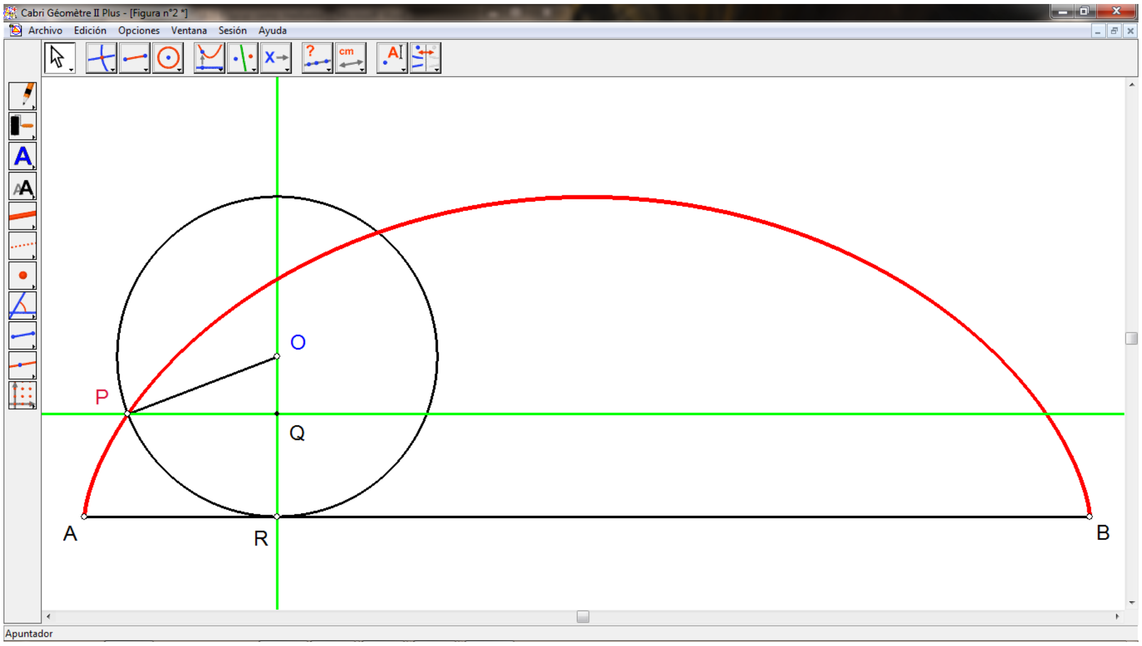



Ilustración 50: Trazo auxiliar

El lugar geométrico de Q cuando R se mueve por AB, es la llamada ***curva compañera***. (Ilustración 51)

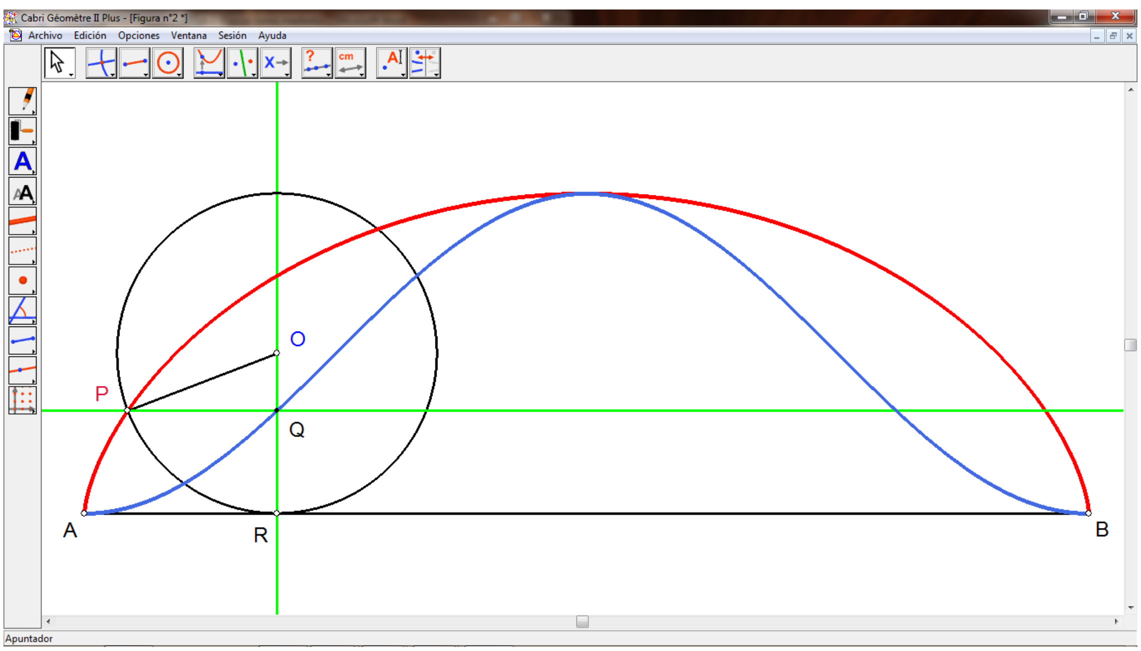



Ilustración 51: La curva compañera

Observemos el segmento PQ. Por el principio de Cavalieri, el área que barre cuando R va de A a B, es la misma área que la del círculo generador. (Ilustración 52)

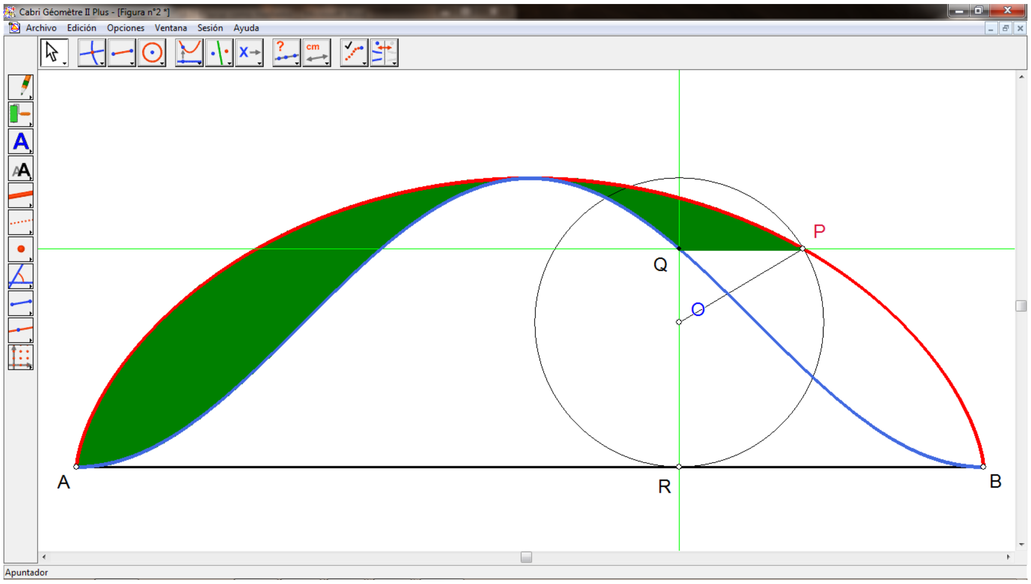



Ilustración 52: Área entre la cicloide y la curva compañera

De manera gráfica podríamos apreciar la equivalencia de áreas (Ilustración 53)

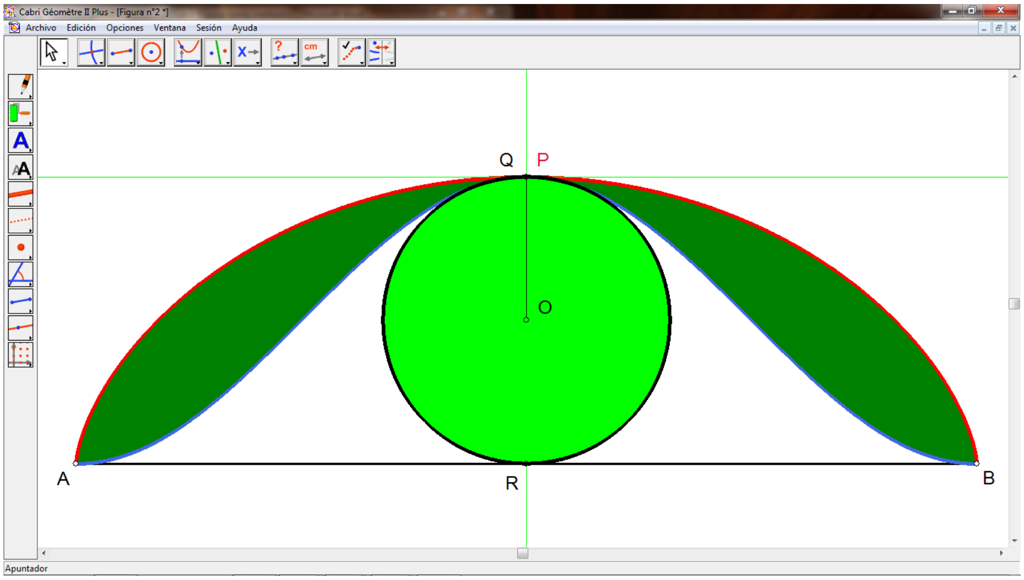



Ilustración 53: Equivalencia de áreas

Por otra parte, la mediatriz MN del segmento AB, determina un rectángulo AMNC, cuya área es igual a $(\pi r)(2r) = 2\pi r^2$ (Ilustración 54)

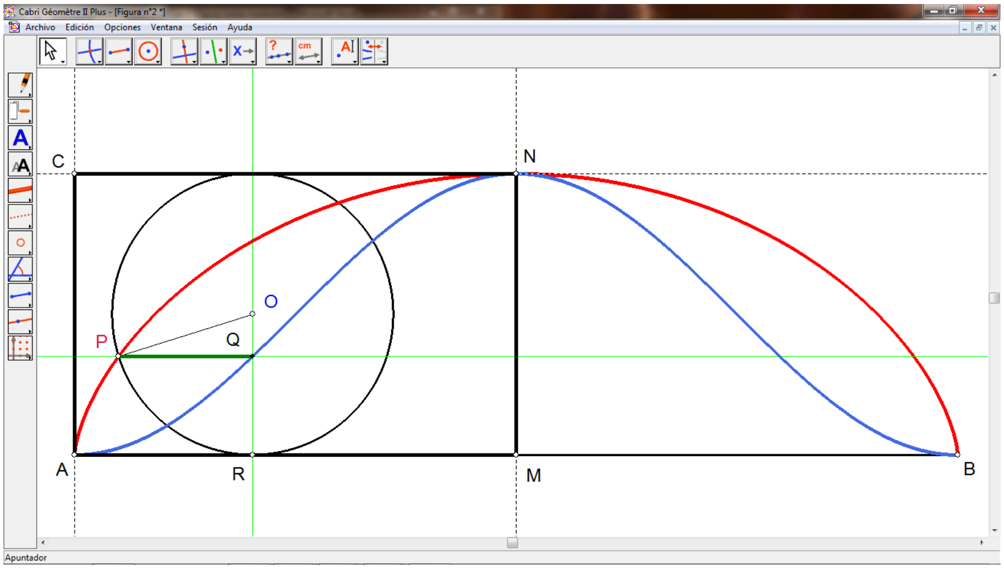



Ilustración 54: Rectángulo AMNC

Este rectángulo está divido en dos partes iguales por la curva compañera. Para probarlo, se transfiere la longitud RQ a N, a través de la herramienta ***compás,*** la intersección de la nueva circunferencia con el segmento MN determina el punto T' a partir del segmento QT paralelo a AB. De nuevo el principio de Cavalieri permite mostrar que ambas áreas son iguales. (Ilustración 55)

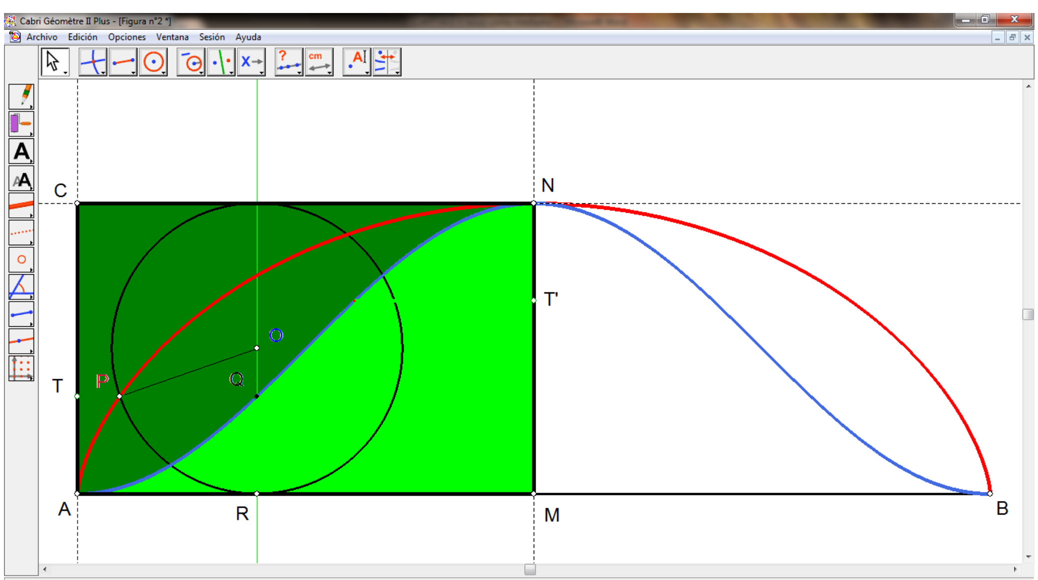



Ilustración 55: Rectángulo AMNC y la curva compañera

Dado que la curva compañera divide al rectángulo en dos secciones con la misma área y por el hecho de que entre la curva compañera y la cicloide se encierra la misma área que el círculo generador, tenemos que el área bajo la curva compañera en la siguiente imagen es:

$$\frac{1}{2}(2\pi r^2) + \frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{1}{2}(2\pi r^2 + \pi r^2)$$

$$= \frac{1}{2}(3\pi r^2) = \frac{3}{2}\pi r^2$$

Contemplando ambas secciones simétricas de la cicloide, tenemos que el área bajo la curva cicloide es $2\left(\frac{3}{2}\pi r^2\right) = 3\pi r^2$, es decir tres veces el área del círculo generador. (Ilustración 56)

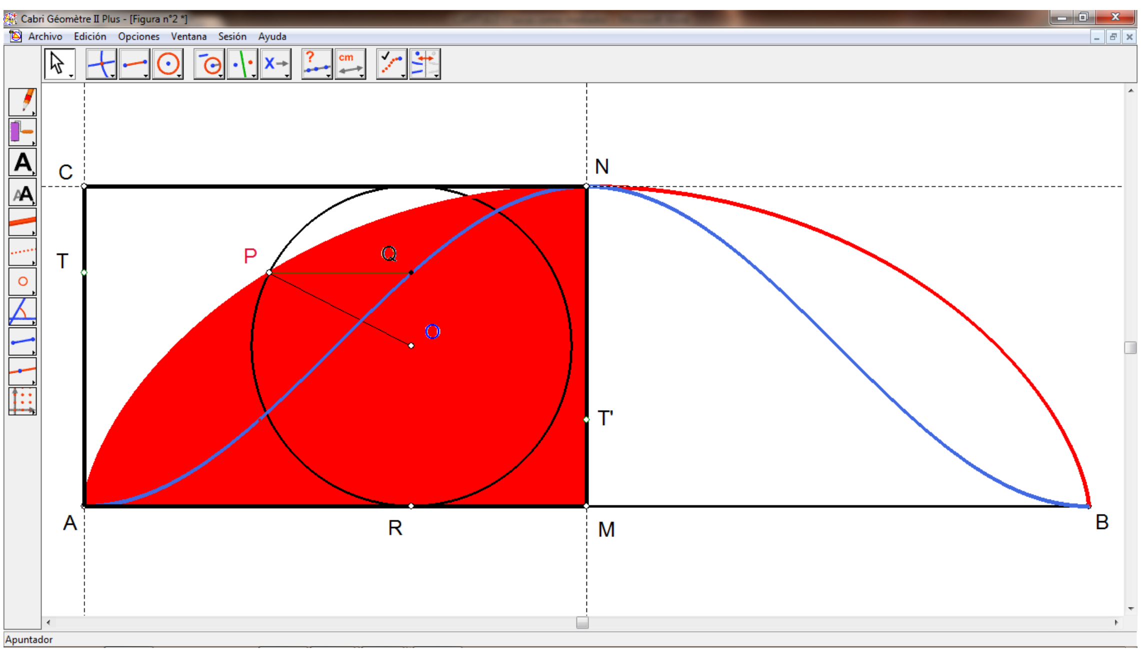



Ilustración 56: El área bajo la curva cicloide

### Problema 3: Un problema de mínimos

Sea un triángulo cualesquiera ABC y P un punto sobre el lado BC. A partir de P se trazan perpendiculares a los lados AC y AB, cuyas intersecciones se nombran N y M respectivamente.

El problema consiste en encontrar la posición de P que haga al segmento MN el menor de los posibles. (Ilustración 57)

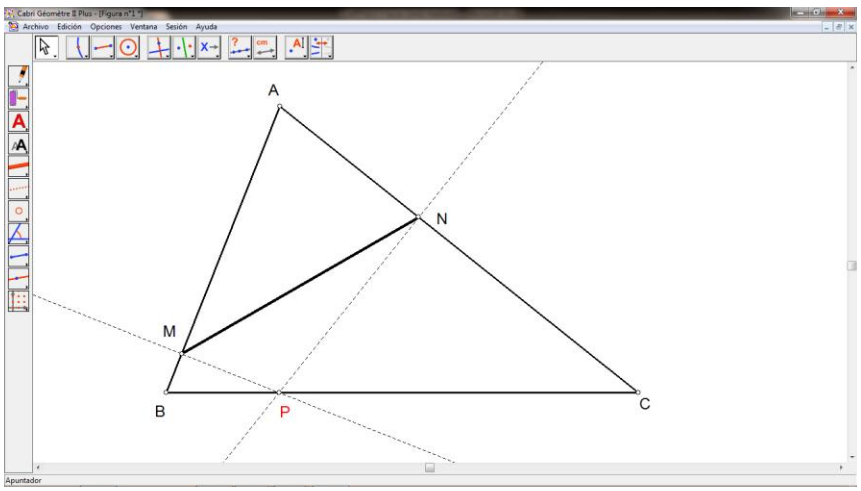



Ilustración 57: Un problema de mínimos

Por P se traza una perpendicular al lado BC y con la herramienta compás, se transfiere la medida del segmento MN a esta semirrecta a partir de P. El punto Q es un indicador de la magnitud del segmento MN. (Ilustración 58)

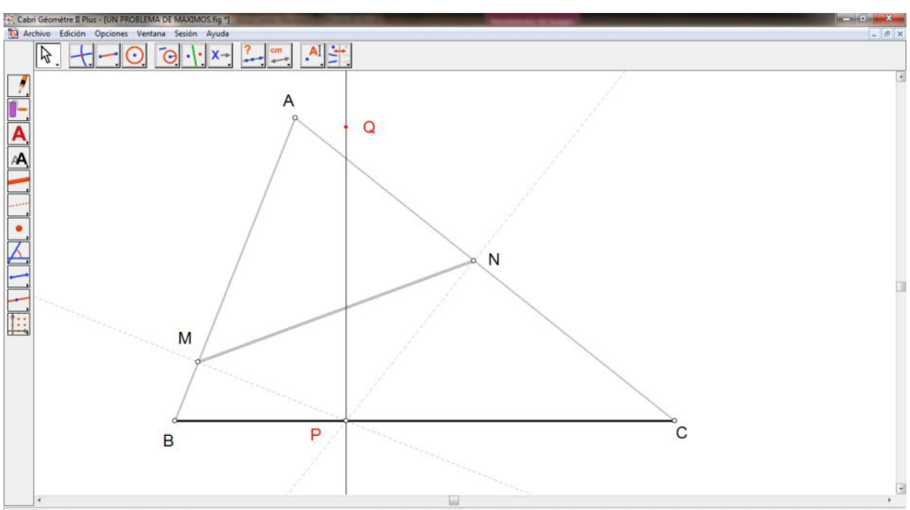



Ilustración 58: Transferencia de medida

Ahora, al mover el punto P, se obtiene el lugar geométrico de las magnitudes del segmento MN (Ilustración 59)

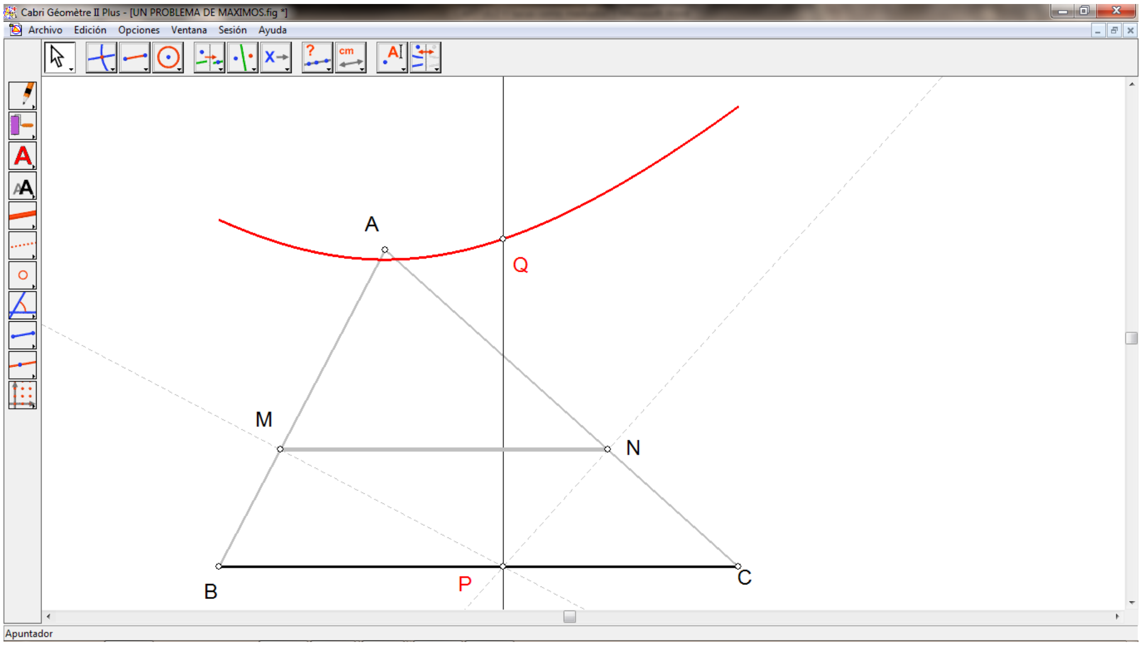



Ilustración 59: Locus

La conjetura es que P debe ser el pie de la altura del triángulo trazada des  A.

Cuando el triángulo es rectángulo, el mínimo se alcanza cuando P se coloca sobre el vértice B. (Ilustración 60)

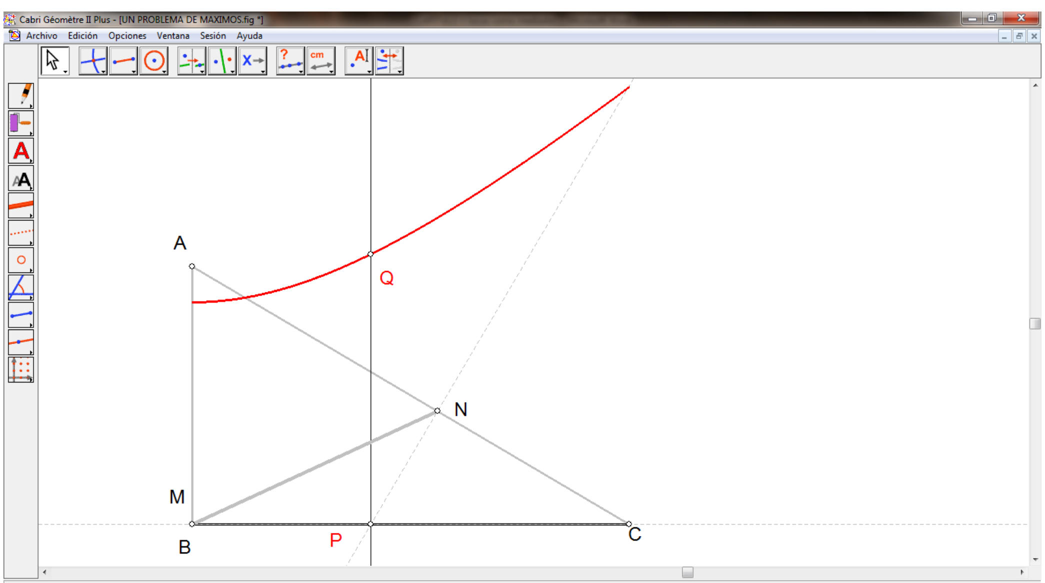



Ilustración 60: Triángulo rectángulo

CAPÍTULO V

# DIMENSIÓN ESTÉTICA DE LO DIGITAL

## Introducción

En un entorno digital, añejos problemas matemáticos adquieren formas nuevas de representación que permite a los estudiantes emplear estrategias de resolución que pueden ser radicalmente distintas a las de un ambiente de papel y lápiz.

Los ejemplos cada vez son más numerosos. El hecho de descubrir cada vez algo nuevo en una situación particular, no necesariamente nos llevaría a conclusiones generales. No basta con el entorno digital para abordar los problemas que plantea la educación matemática, pues se requiere incluirlo como parte de un proyecto educativo más amplio. Es decir, el medio digital debe funcionar como soporte semiótico: las ideas matemáticas tendrán entonces un nuevo medio de expresión.

## Expresión digital del trazo geométrico. El iLocus

En el papel mediador de la geometría dinámica, es necesario diferenciar los conjuntos de puntos del mundo de papel y lápiz llamado *lugar geométrico*, del locus como objeto dinámico, manipulable.

Lo que denominaremos ***i-Locus***, es al lugar geométrico como objeto borde (Moreno L. , La semiótica y lo digital: dominios coextensivos, 2011), dentro de una ambiente digital.

Para ejemplificar esta atribución, se describirá la construcción dinámica de una parábola: dado un punto $F$ fuera de una recta $L$, se construye una perpendicular a $L$ por un punto $M$ en ella. Se traza la mediatriz de $FM$ y su intersección con la perpendicular la denominaremos $C$.

Este último punto $C$, será el centro de una circunferencia tangente a $L$, que pase por $F$. De esta manera se garantiza que $FC = CM$, es decir la definición de parábola: el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco (F) y una recta L llamada directriz. (Ilustración 61)

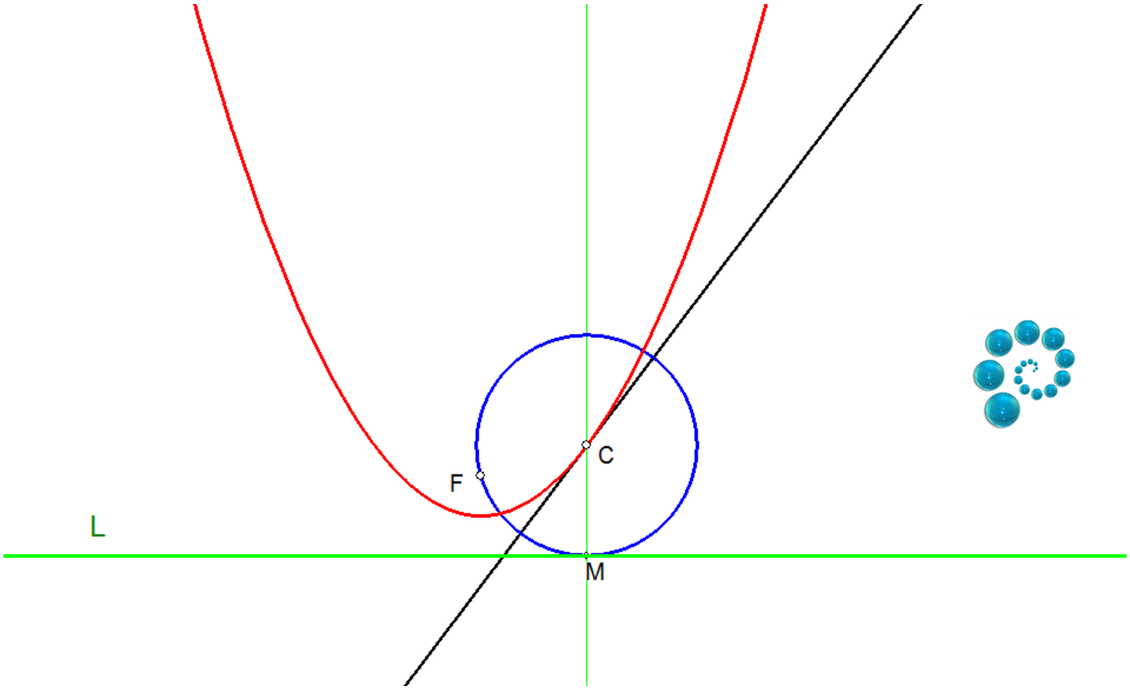



Ilustración 61: Construcción dinámica de una parábola

Al desplazar M sobre la recta que lo contiene, usando la herramienta “traza”, se describe la parábola. (Ilustración 62)

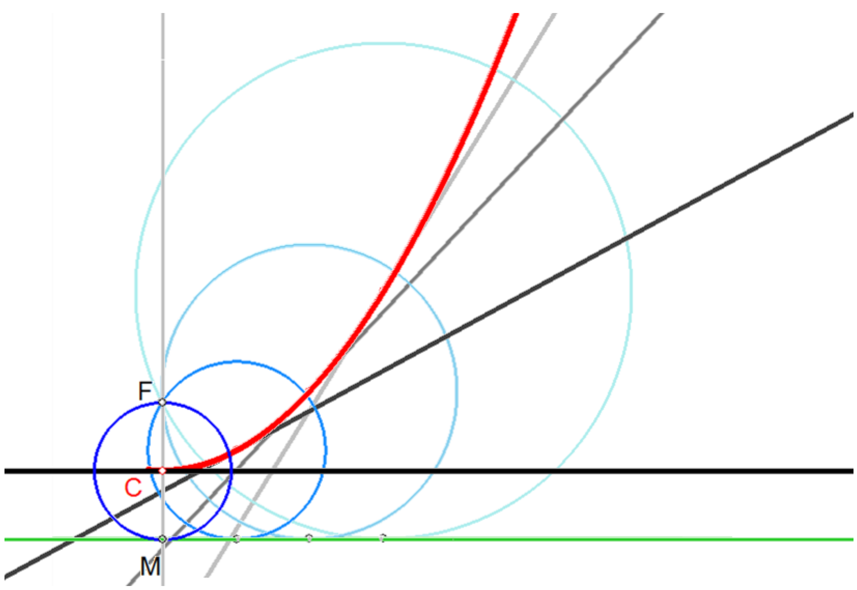



Ilustración 62: Traza de la parábola al desplazar M

El iLocus de esta construcción es la parábola que puede ser manipulada a través de los elementos estructurales que pueden variar, como el foco. En la ilustración 63 se muestra el efecto sobre el locus cuando el foco F se acerca a la recta L:

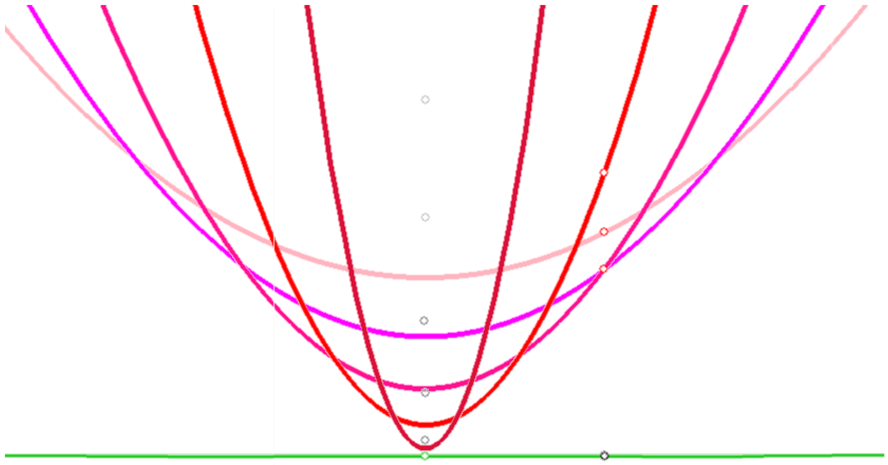


Ilustración 63: iLocus. Efecto de acercar el foco a la recta L

Uno de las propiedades de la mediatriz que se puede observar con esta construcción es que simultáneamente a su condición de mediatriz, también es tangente a la parábola en todos sus puntos.

La exploración también puede incluir los efectos en la parábola cuando el foco se coloca bajo la recta L. (Ilustración 64)

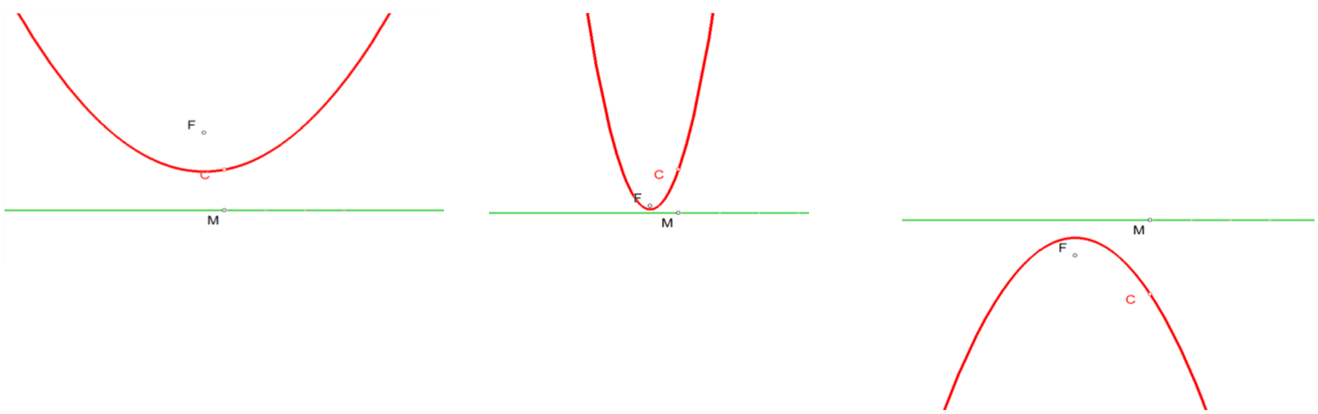



Ilustración 64: iLocus

Esta flexibilidad en la manipulación de los parámetros de la parábola, permite una exploración dinámica. Este es el rasgo fundamental de un iLocus.

**Un ejemplo: problema de máximos**

Sea M un punto móvil sobre el lado AD del cuadrado ABCD. La posición de M determina las posiciones de los segmentos DU y MP cuya intersección P traza la cuadratriz de Hippias. La posición de M, determina simultáneamente las posiciones de los puntos U, R, S y T (que son los vértices de un nuevo cuadrado) cuando la construcción de la cuadratriz se realiza en cada uno de los lados del cuadrado ABCD, como se muestra en la ilustración 18. (Ilustración 64)

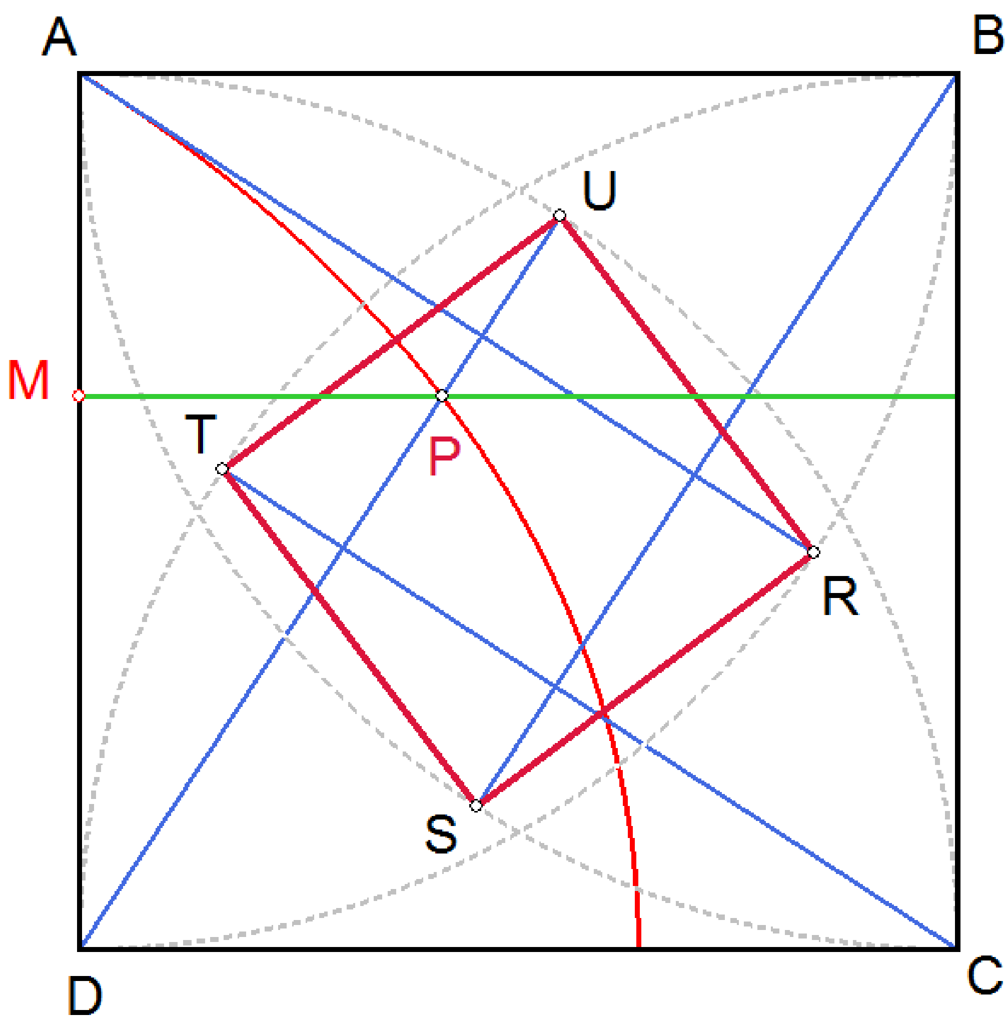



Ilustración 65: Cuadratriz de Hippias sobre los lados de un cuadrado

El problema consiste en determinar la posición de M de manera que la razón entre las áreas de los cuadrados ABCD y URST sea la máxima.

El problema a lápiz y papel parecería incluso irresoluble. Sin embargo, en un ambiente digital podría plantearse distintas situaciones:

El ***máximo*** puede observarse en la siguiente representación (Ilustración 65) en un ambiente de Cabri:

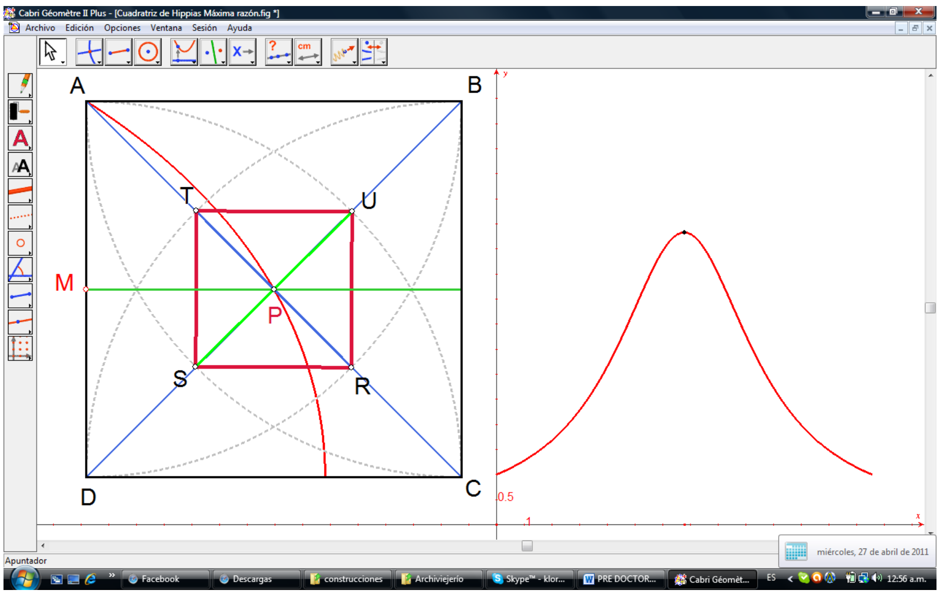



Ilustración 66: solución al problema, en un ambiente de Cabri

La posición de M que garantiza la razón máxima, es el punto medio del lado AD

Otro problema consiste en bosquejar el ***lugar geométrico de una diagonal del cuadrado URST***, como se muestra en la ilustración 66, en color verde:

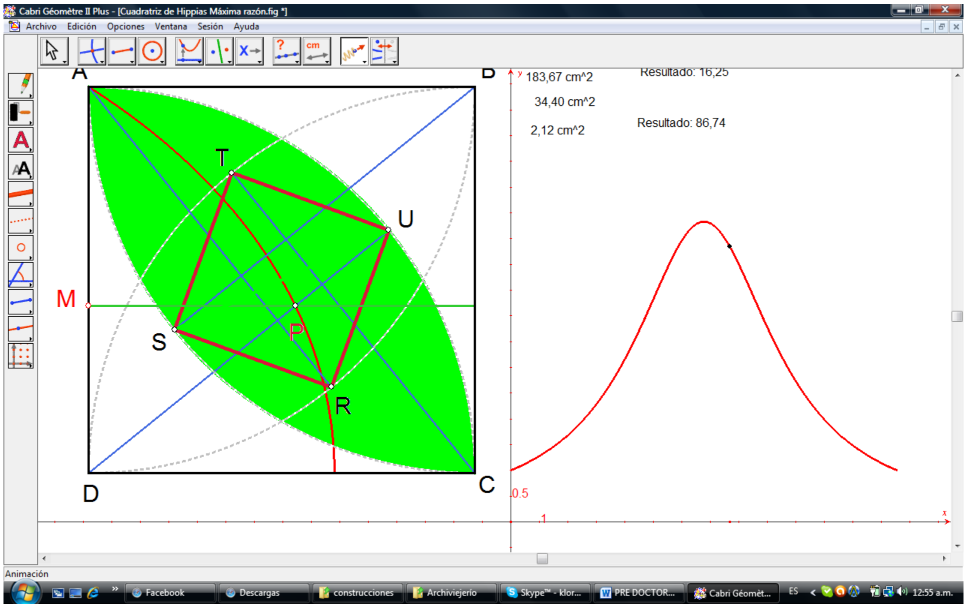



Ilustración 67: Locus de una diagonal del cuadrado URST

Para finalizar nuestro ejemplo, se puede mostrar que el lugar geométrico del centro de la familia de circunferencias que contienen a los puntos M, P y U, vive en una rama de una hipérbola (en la ilustración 67, resaltada en gris):

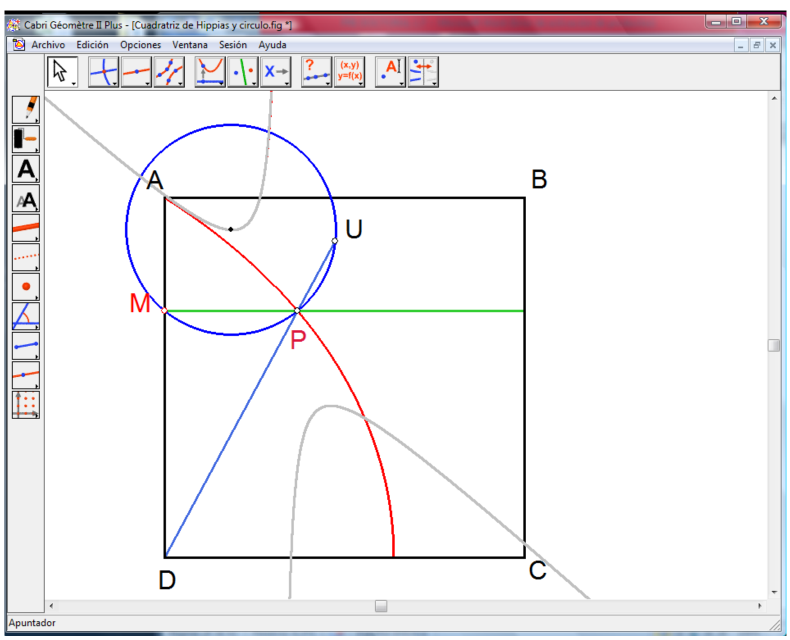



Ilustración 68: locus del centro de la familia de circunferencias que contienen a M, P y U

### La componente didáctica

El diseño del iLocus, también puede agregar una componente didáctica. Por ejemplo, para el estudio de la trayectoria de un punto **P** definido sobre el radio de un círculo que rueda, puede proponerse la siguiente construcción (Ilustración 69)


Ilustración 69: iLocus. Componente didáctica

La exploración empieza al desplazar la bicicleta a través del punto B. Al activar el botón "Traza". El punto P describe la trayectoria que se muestra en la ilustración 70.

El estudiante puede desplazar la bicicleta y ver la trayectoria que describe P. A partir de ahí, se puede sugerir se borre la traza y que se cambie la posición de P.

Se inicia una exploración de los efectos sobre lugar geométrico que determina P cuando se mueve B.


Ilustración 70: Traza del punto P

Se pueden generar una discusión sobre estos efectos, que lleve al planteamiento de conjeturas por parte de los estudiantes. Preguntas como las siguientes se vuelven necesarias: ¿Qué sucede con el lugar geométrico cuando P está muy cercano al centro de la llanta?, ¿Cómo es el lugar geométrico de P cuando se encuentra al borde de la llanta?

Cuando la discusión haya abordado estas dos cuestiones, se puede proponer desactivar la Traza y activar el botón “Locus”.

Con el locus visible, se pueden validar las conjeturas realizadas, y proponer rasgos distintivos de este lugar geométrico, así como los efectos sobre él cuando se modifica la posición de P. Es este momento en que el **iLocus** se introduce en el escenario de exploración.

En la ilustración 71 se muestran algunos momentos en que el iLocus ofrece datos sobre las características de lugar geométrico en estas condiciones.

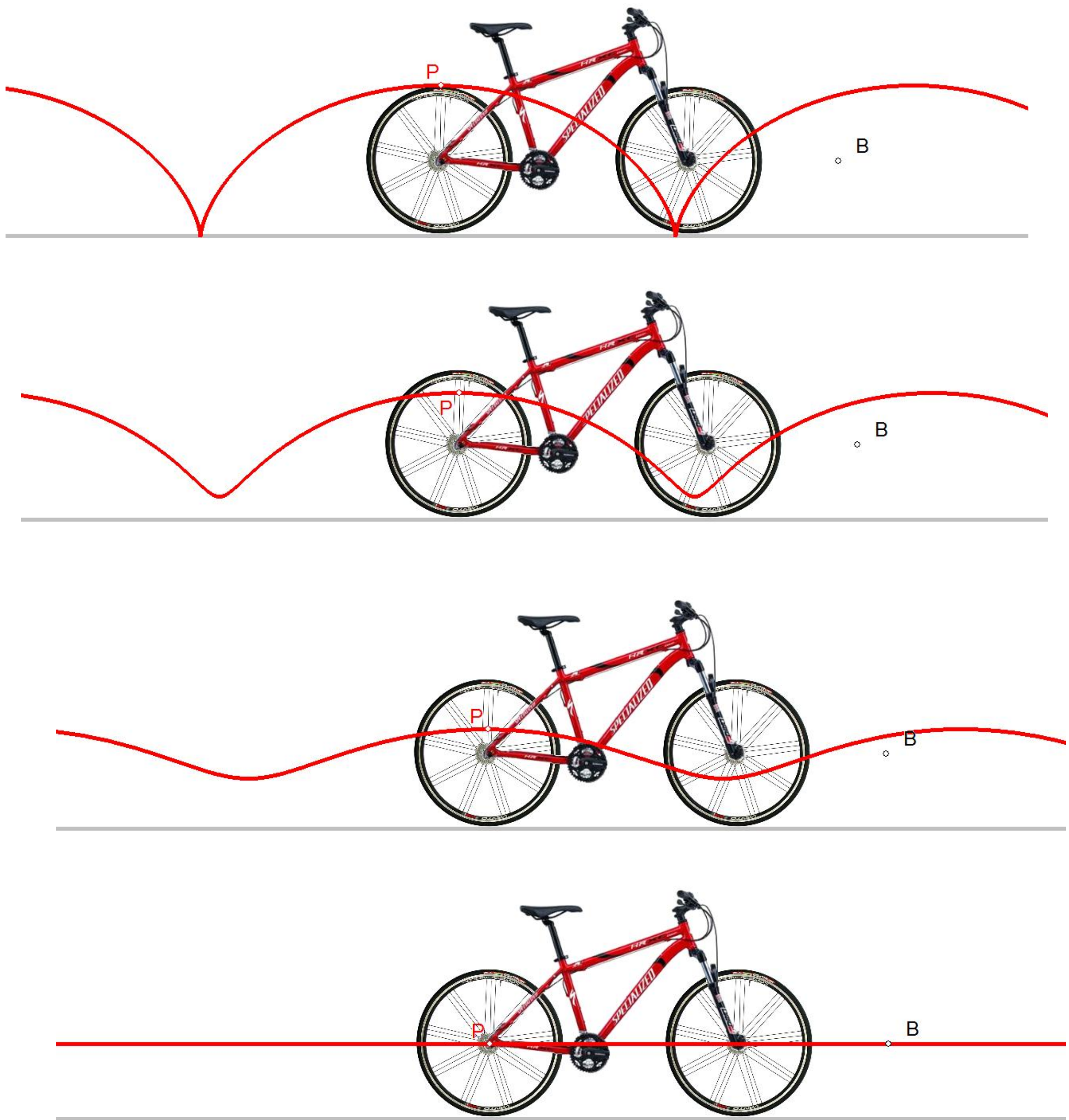



Ilustración 71: iLocus como herramienta de mediación

El estudiante explora las propiedades del lugar geométrico a través de la manipulación directa sobre el. Es decir, el iLocus es para el una herramienta de mediación que le permite explorar el objeto matemático que en un caso particular es la cicloide y en otro caso una línea recta.

Finalmente, se puede prescindir de la imagen de la bicicleta al desactivarla con el botón “bicicleta”. Al pulsar “Círculo”, permanecerá intacto el iLocus, pero podrá visualizarse el círculo que rueda y que genera este lugar geométrico. (Ilustración 72)

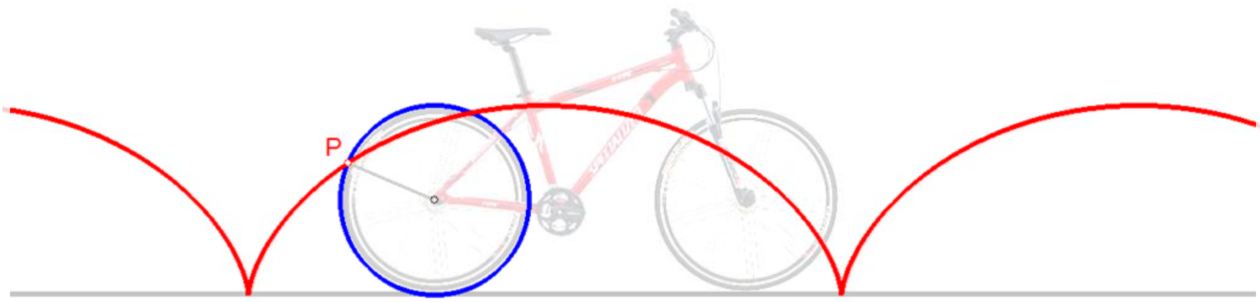



Ilustración 72: Abstracción del contexto

### Una aplicación al estudio del área bajo la curva

El iLocus, puede ser también, parte esencial en la exploración de otros conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el estudio del concepto de “área bajo la curva”, el iLocus puede adoptar el papel de la función a integrar y realizar un análisis cualitativo de esta propiedad.

Dados los límites superior e inferior, un interactivo como el que se muestra en la ilustración 73, se transforma en una herramienta de mediación.

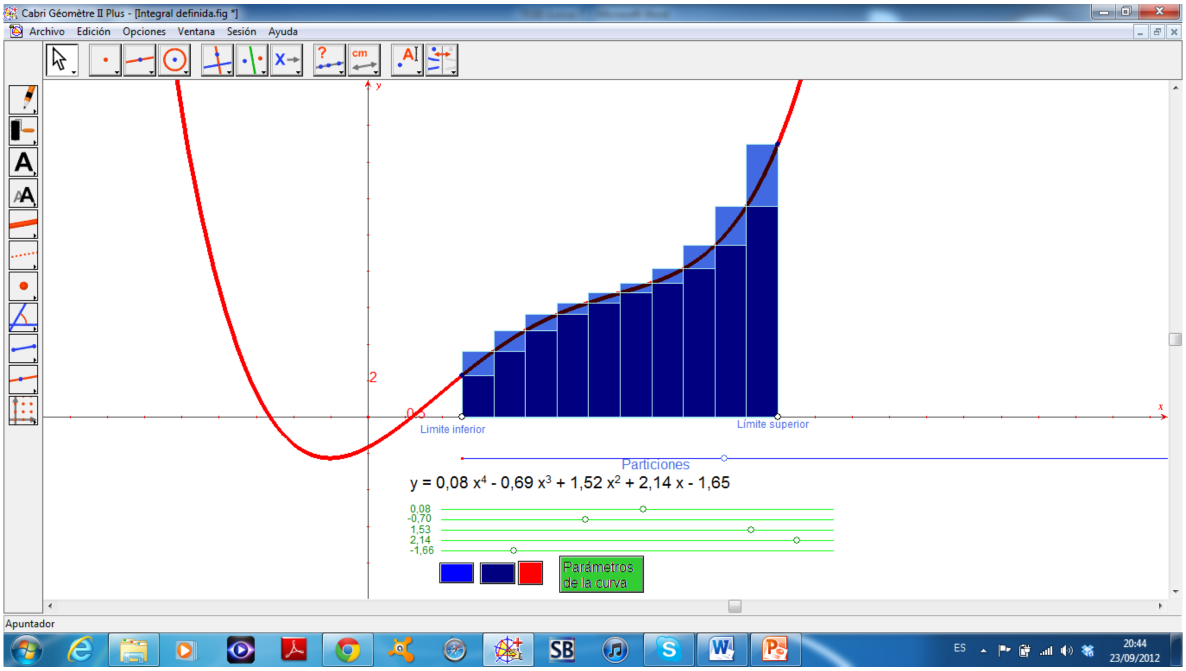



Ilustración 73: iLocus y el área bajo una curva

Este interactivo, en particular, permite la manipulación de los coeficientes de una función de grado 4 a través de 5 deslizadores. El efecto de esta acción es el iLocus y se expresa en la forma de la gráfica de la función.

También es posible manipular el número de particiones a través del deslizador en color azul. Se puede prescindir de los deslizadores que controlan los parámetros de la función para realizar una exploración más dirigida. (Ilustración 74)

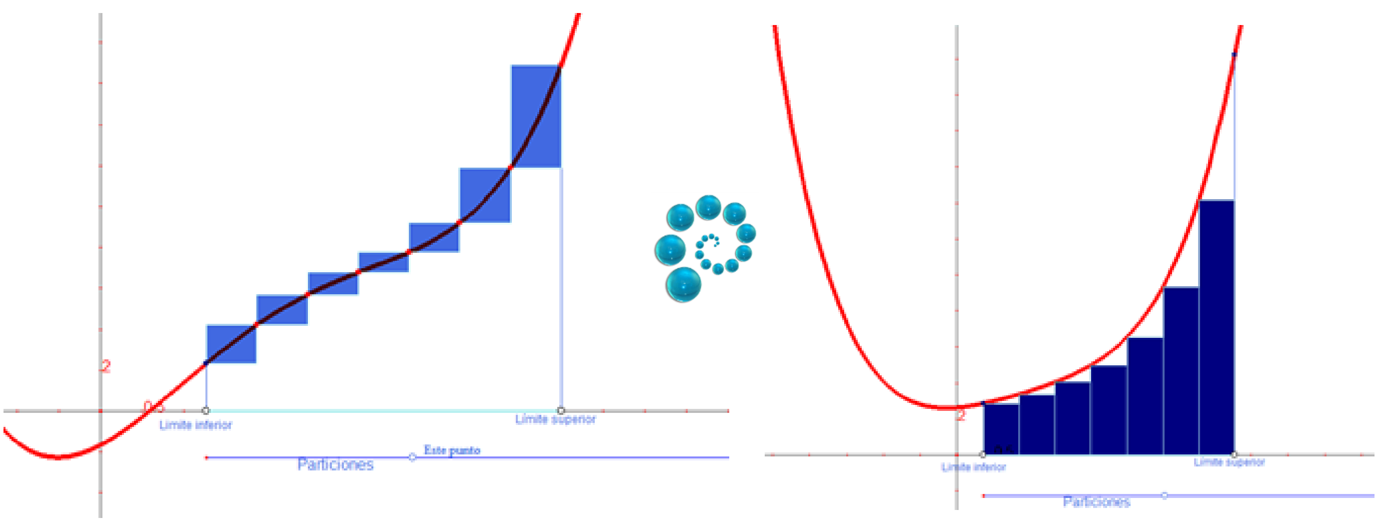



Ilustración 74: Exploraciones

# CAPÍTULO VI

# DISEÑO EXPERIMENTAL

## Introducción

A través del diseño experimental, nos proponemos observar los rasgos distintivos de la acción cognitiva de los sujetos. Esto incluye, desde luego, sus interacciones en el seno un grupo de aprendizaje. La cognición humana no reside sólo en un cerebro aislado sino que es moldeado por la acción social distribuida. (Lozares, C.200; pág. 101)

En el desarrollo de las actividades experimentales, se ponen de relieve dos momentos fundamentales en la resolución de un problema: por una parte, la representación de lugares geométricos que se realizan en un medio de papel y lápiz, y por otra, los construidos en un medio digital. Se trata de un análisis cualitativo a través de la observación experimental de las ejecuciones en tiempo real que los participantes realizan durante este proceso.

El experimento se llevó a cabo con un grupo de trabajo, durante un periodo de 16 semanas de actividades. Los rasgos generales de este proceso se describen en este capítulo, pero pueden condensarse en los siguientes puntos:

1. *Diseño, aplicación y evaluación de problemas que involucran lugares geométricos*.
2. *Proceso de apropiación del medio digital*.
3. *Resolución de problemas en medios distintos*.
4. *Recopilación de los datos*.

También se documentó el proceso de resolución de problemas con herramientas digitales, a través del software *Camtasia Studio*, que consiste en grabar en tiempo real lo que sucede en pantalla de la computadora en uso. Con estos instrumentos, fue posible obtener los siguientes tipos de evidencias:

- Videograbaciones.
- Registro escrito por cada participante de los intentos de resolución de los problemas planteados con lápiz y papel.
- Archivos de video de captura de pantalla en tiempo real.
- Archivos de las construcciones realizadas en Cabri y Geogebra.

## Características de los participantes

Los participantes son 24 profesores de educación secundaria que se encuentran frente a grupo y que participaron en distintos cursos de actualización promovidos por la Dirección de Actualización y Centro de Maestros del Distrito Federal (DACM). En adelante nos referimos a ellos como **estudiantes-profesores**, dado que en el periodo en que se trabajó con ellos, se encontraban realizando estudios de maestría en distintas instituciones como el CINVESTAV, la UNAM y una maestría inter-normales que agrupan las Escuela Normal Superior de México, la Benemérita Escuela Nacional de Maestros y la Escuela Normal de Especialización.

Los estudiantes-profesores pertenecen al distintos sistemas como telesecundaria, secundarias diurnas, y secundarias técnicas. Su adscripción data principalmente del Distrito Federal, pero también se involucraron estudiantes-profesores cuyo centro de trabajo se encuentran en el estado de Querétaro y Puebla. Estos estudiantes-profesores se encontraban radicando temporalmente en la zona metropolitana debido al carácter presencial que implicaba su pertenencia al programa de maestría que estaban cursando.

El grupo de estudiantes-profesores, participaron en distintos cursos de actualización, de los cuales en común habían cursado:

- SC12 Contenido y enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Secundaria. Duración: 40 hrs.
- La problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas Duración: 40 hrs.
- La matemática con un enfoque en competencias. Duración: 40 hrs.

El grupo de estudiantes-profesores, se concentró durante seis módulos de trabajo bajo el programa de diplomado en educación secundaria, auspiciado por la UNAM y promovida por la DACM, perteneciente al programa de Formación Pedagógica para Maestros en Servicio (PROFOPEMS). El diplomado fue diseñado por la Dirección General de Educación Secundaria Técnica. En este lapso de trabajo, se extrajeron las 16 sesiones en que se estructuró el proceso de experimentación.

## Diseño experimental

El proceso de experimentación se llevó a cabo en 4 momentos, los cuales se describen a continuación:

### Diseño, aplicación y evaluación de problemas que involucran lugares geométricos.

En un principio, antes del trabajo con los estudiantes-profesores, se plantearon actividades de trabajo en las cuales aparecen problemas que conducen a la identificación de un *conjunto de puntos que satisfacen una condición determinada*. Las actividades de trabajo fueron piloteadas con profesores de telesecundaria del estado de Querétaro, durante una reunión de trabajo académico con profesores de matemáticas de la región norte lo que permitió su evaluación y posterior ajuste; y debe aclararse que estas actividades-problema tenían el objetivo de calibrar el tipo de situaciones a plantear. Algunas de ellas terminaron por omitirse.

Se diseñó un instrumento cuyo objetivo era obtener evidencia de cómo los estudiantes-profesores se imaginan un lugar geométrico a partir de una condición determinada. No se permitió un análisis exhaustivo de las condiciones del problema para poder obtener una referencia de lo que los estudiantes-profesores se imaginan que sería la respuesta.

A través de una hoja de respuestas, seleccionaban de entre 4 opciones la representación que suponían como solución al problema planteado. Cada pregunta tenía un lapso de 10 segundos para elegir respuesta.
Los 4 problemas y sus opciones de respuesta fueron:

**La llanta que rueda**

*Identifique la trayectoria que describe P' sobre la pared, como la proyección de un punto P (el pivote) sobre una llanta que se hace rodar.* (Ilustración 75)

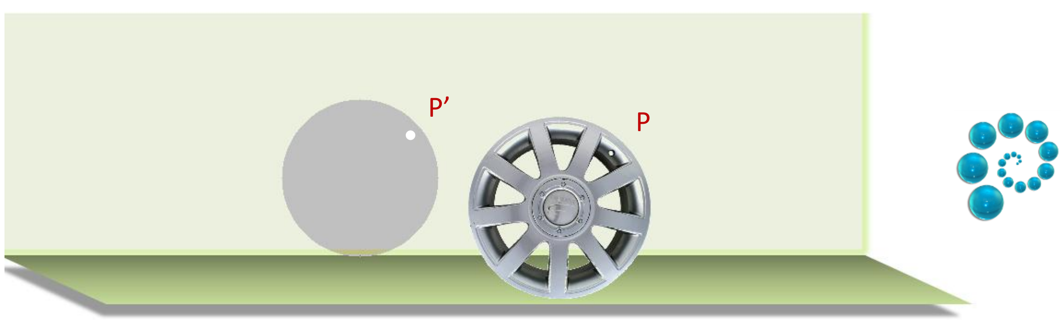
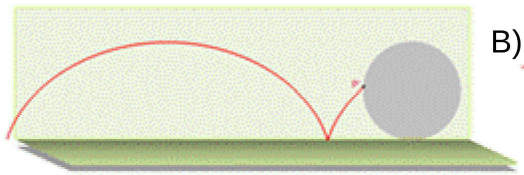
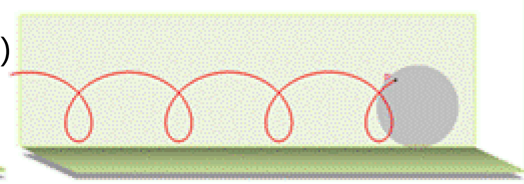
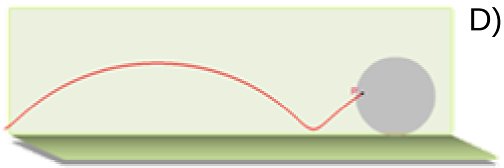



Ilustración 75: La llanta que rueda

Las opciones de respuesta fueron:

A)

B)


C)

D)


Las respuestas de los estudiantes-profesores se muestran en una tabla de frecuencias y en una gráfica circular. (Ilustración 76)

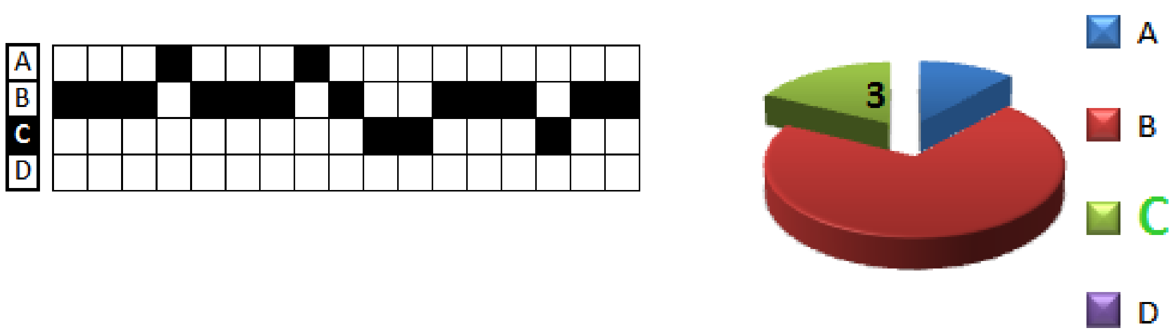



Ilustración 76: Respuestas

Solo 3 de los 17 participantes eligieron la opción C que contenía la trayectoria correcta. Es interesante cómo 12 de ellos visualizaron el comportamiento de la proyección de P, pues no consideraron la longitud del radio para determinar la trayectoria; es decir, lo visualizaron solo como un punto que va recorriendo el plano de manera cíclica. Dos de los participantes eligieron la representación clásica de la cicloide. Pero no consideraron que el punto P no esté sobre el borde de la llanta.

**Cuadrado en tumbos**

*¿Cuál es la trayectoria que sigue el vértice A de un cuadrado que va dando tumbos sobre una línea recta?* (Ilustración 77)

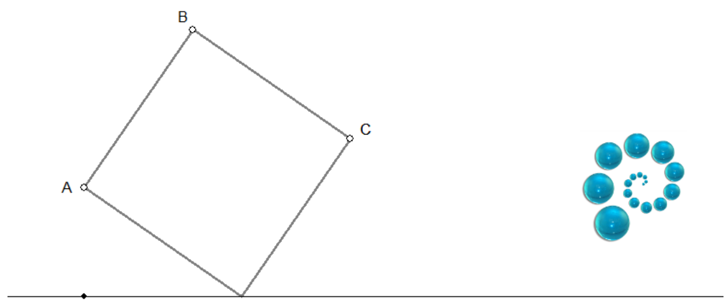
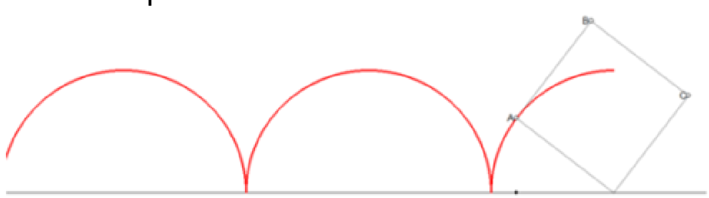



Ilustración 77: Cuadrado en tumbos

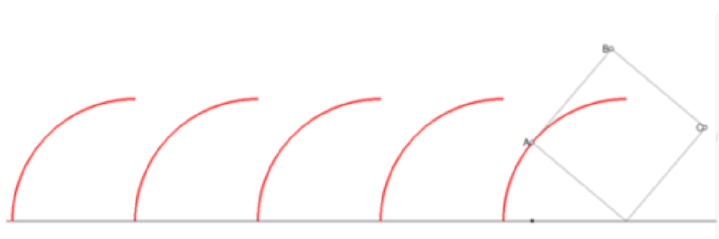
Las opciones de respuesta fueron:

A)

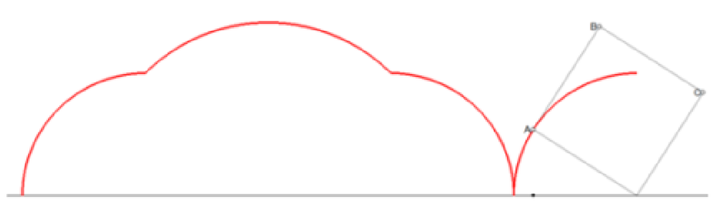


B)

C)



D)



La ilustración 78 muestra el comportamiento del grupo:

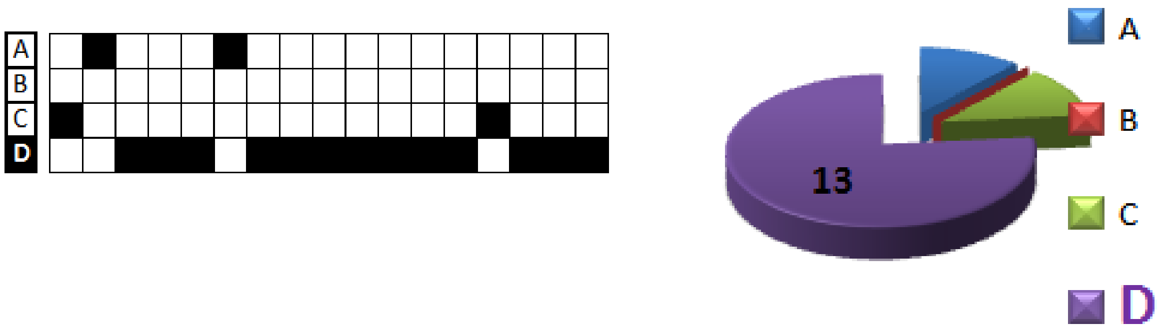



Ilustración 78: Respuestas al problema

La mayoría eligió la opción correcta. Sin embargo, dos de ellos consideraron una cicloide como posible trayectoria.

Es de llamar la atención también, que dos participantes consideran que la trayectoria tiene rupturas periódicas. Como si en un momento determinado el vértice alcanza su altura máxima y de pronto se encontrara muy próximo a la horizontal, es decir, una discontinuidad en el lugar geométrico.

**El hilo enrollable**

*El segmento PQ se enrollará alrededor de la circunferencia que se muestra. ¿Qué trayectoria describirá P si el hilo se mantiene siempre tenso?* (Ilustración 79)

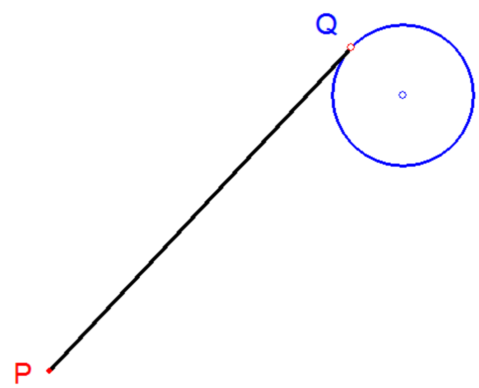
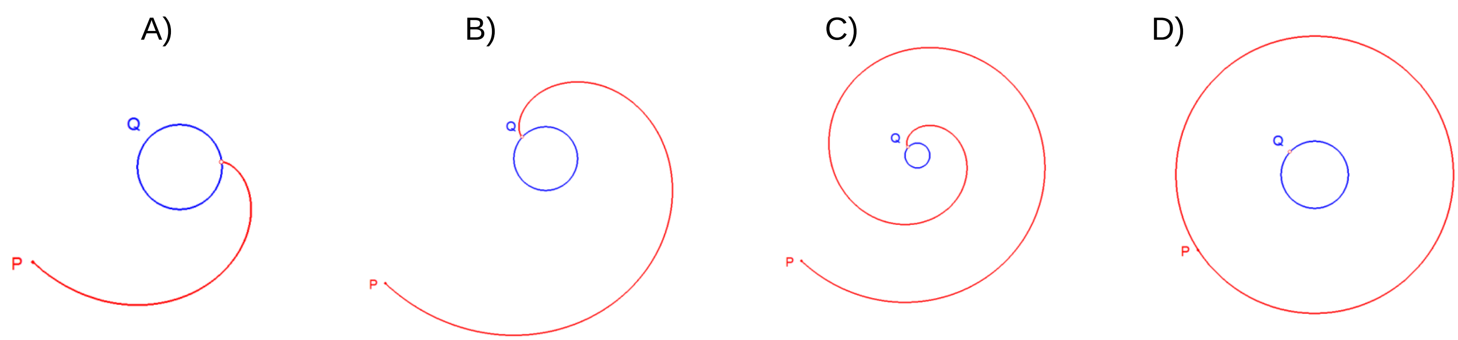



Ilustración 79: El hilo enrollable

Las opciones de respuesta fueron:




Los estudiantes-profesores tuvieron la siguiente elección (Ilustración 80).

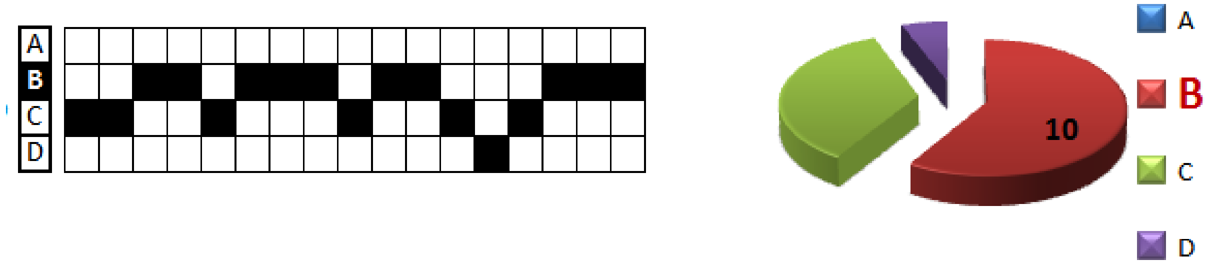



Ilustración 80: Respuestas

De los 17 estudiantes-profesores, 10 de ellos eligieron correctamente la opción que describe el lugar geométrico que resuelve el problema.

Es significativo que 6 participantes (el 35 %) eligieran la opción C, lo que da evidencia de que no visualizan la proporción entre la longitud del hilo en relación con la circunferencia; es decir, solo establecen la propiedad de que el punto P gira alrededor de la circunferencia describiendo una espiral. Finalmente, se muestra un concentrado donde se puede observar el desempeño grupal en la visualización de los conjuntos de puntos.

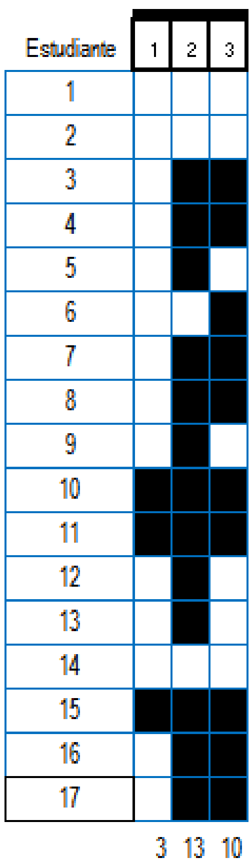



Ilustración 81: Concentrado de respuestas

Con base en el concentrado de la ilustración 81, es posible inferir que:

- Cerca del 50% de las preguntas no obtuvieron la respuesta esperada.
- Solo tres estudiantes-profesores eligieron correctamente las opciones.
- Tres estudiantes-profesores no acertaron a ninguno de los tres conjuntos de puntos.

**El triángulo en el triángulo**

Sea ABC un triángulo cualesquiera.

Con el mismo lado BC se construye otro triángulo cuyo tercer vértice **M** se desplaza por el perímetro de ABC.

Sea $h$ la altura del triángulo MBC y $A(h)$ el área del triángulo MBC en función de $h$

¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuyas coordenadas son $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}))$?

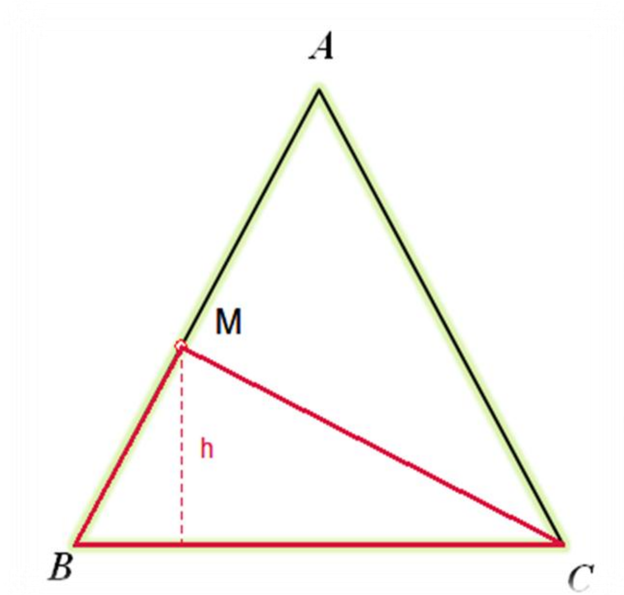



Ilustración 82: Problema "El triángulo en el triángulo".

Los estudiantes-profesores consensaron la siguiente respuesta: "***El lugar geométrico es una parábola***". Esto puede explicarse porque los estudiantes-profesores se centraron en la idea de que el área se manifiesta en unidades cuadradas. Sin embargo, en el problema solo se está variando una longitud, por lo que la relación que se establece entre la altura del triángulo y el área es una relación lineal.

Este comportamiento grupal, también pudo observarse en una sesión llevada a cabo en un simposio sobre uso de tecnología, en la cual a pesar de que los asistentes modelaron el problema en una calculadora graficadora, antes de mostrar el lugar geométrico habían predicho que el conjunto de puntos sería una curva de grado 2, es decir una parábola.

El problema y el lugar geométrico buscado, modelados en la calculadora N'Spire, se muestran en la ilustración 83:

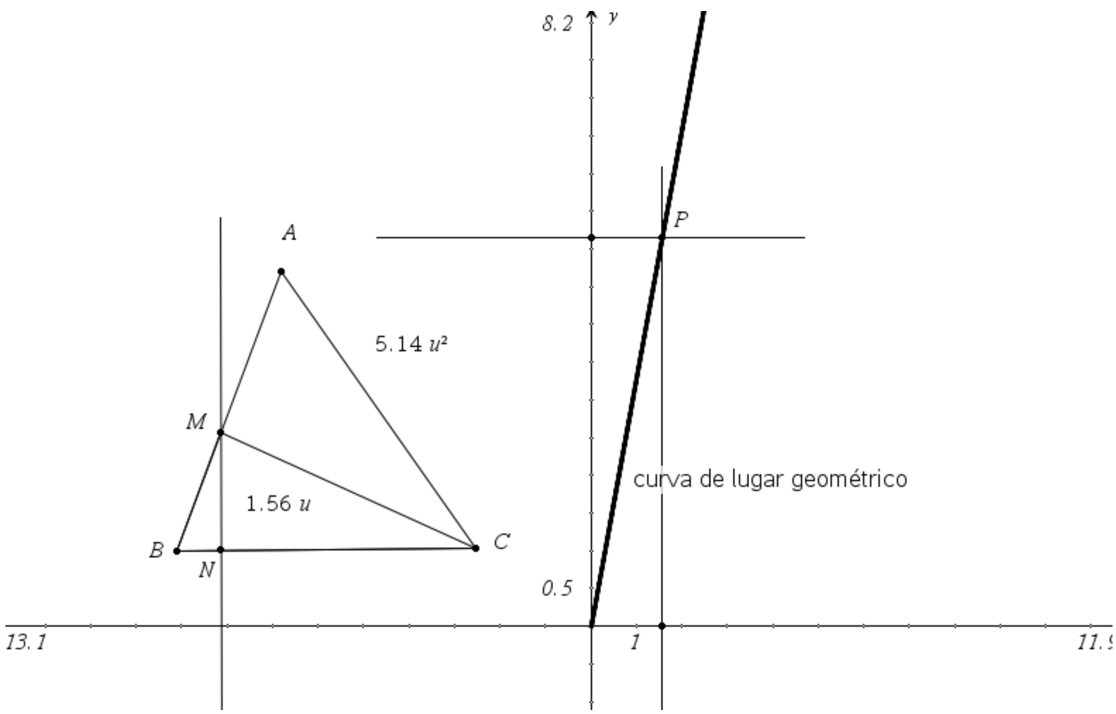



**Ilustración 83: Solución al problema de "el triángulo en el triángulo" en una ambiente de geometría dinámica de la calculadora N'Spire.**

Las actividades anteriores, fueron propuestas desde la proyección de una presentación. No implicaba interacción directa de los profesores con los objetos matemáticos.

Con base en esta experiencia, se hizo necesario agregar un componente interactivo que permitiera a los participantes involucrarse como grupo en un entorno digital. De esta manera se diseñó un artefacto digital, que denominamos superficie interactiva, que consiste en emular la interactividad de un pizarrón interactivo.

## Proceso de apropiación del medio digital.

Durante las 16 sesiones de trabajo, se plantearon problemas de construcciones geométricas de manera que los estudiantes-profesores se apropiaran de las principales herramientas del entorno Cabri, aunque algunos eligieron trabajar con geogebra.

Al mismo tiempo, se realizaron actividades encaminadas a desarrollar un artefacto que emulara las propiedades de un pizarrón electrónico. Este artefacto lo denominamos Superficie Interactiva (SI) y se describe a continuación.

### Superficies interactivas

Existen en el mercado, diversos pizarrones electrónicos que permiten una interacción directa del usuario con el software. Sin usar el ratón. Algunos pizarrones requieren un lápiz electrónico y otros responden directamente al tacto.

En educación básica, por ejemplo, las escuelas primarias cuentan con pizarrones Smart Board, y algunas escuelas secundarias fueron dotadas con pizarrones interactivos Alfher eBeam.
La idea de incorporar un artefacto digital que permitiera emular la funcionalidad de un pizarrón interactivo, va orientado a recuperar la experiencia de los profesores en estas herramientas digitales y su proyección hacia contextos escolares en el que la tecnología cada vez incrementa su presencia.

Nos interesaba incorporar la interactividad que ofrece un pizarrón electrónico, dado que exploraríamos también el comportamiento grupal en la resolución de un problema que involucra el concepto de lugar geométrico. De esta manera no consideramos necesario utilizar un aula digital o laboratorio de cómputo, en la cual los docentes podrían trabajar individualmente cada quien en un computador, sino observar las interacciones en el seno de un grupo que se enfrenta a un problema matemático con la mediación de una herramienta interactiva como el pizarrón electrónico.

Para el diseño de un emulador de pizarrón interactivo, se requirió de un control remoto Wii mote, un lápiz infrarrojo, una superficie de proyección y un software que sincroniza todos estos artefactos.

**Utensilios**

Los utensilios necesarios para generar una SI son:

- **Wii mote**. Es el control remoto Wii, que representa el mando principal de la consola Wii de Nintendo. (Ilustración 84)



Ilustración 84: Wii mote

- **Lápiz infrarrojo**. Es un instrumento que se debe construir. Consta de un caparazón (un marcador de agua, por ejemplo), al cual se le introduce una pila AA o AAA (1.5 volts), un led infrarrojo y un pulsador para interrumpir la corriente. (Ilustración 85)


Ilustración 85: Lápiz infrarrojo

- **Computadora con dispositivo Bluetooth**. El principal medio que hacer funcionar el artefacto digital, es la transmisión de datos vía Bluetooth, por lo que se requiere usar una computadora que tenga incorporada esta tecnología.

- **Proyector**. Es un dispositivo que permite proyectar en cualquier superficie, la pantalla de una computadora.

Ilustración 86: Cañón proyector

## El lápiz infrarrojo

Para construir un lápiz infrarrojo, se requiere de un caparazón sólido que permita simular un lápiz electrónico.

Se requiere:

- Una batería AA o AAA

- Cable
- Led infrarrojo
- Pulsador

El siguiente diagrama (Ilustración 87) muestra la manera de construir el artefacto:

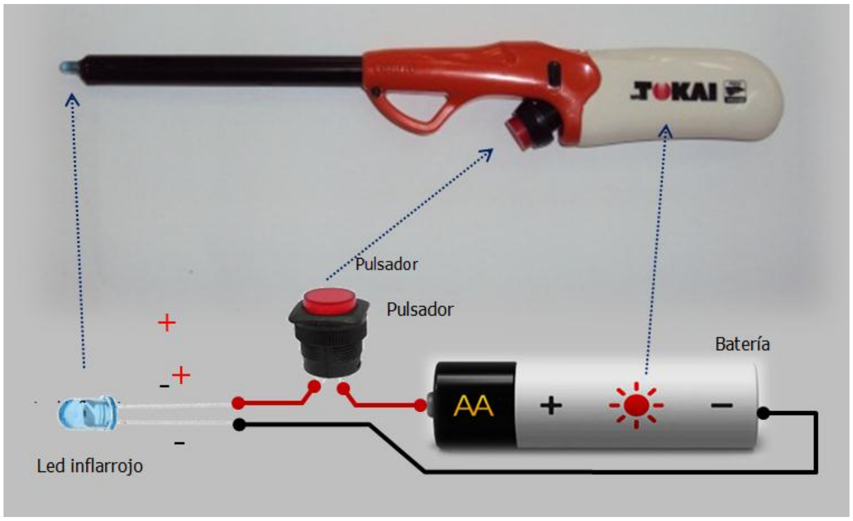



Ilustración 87: Diagrama de construcción del lápiz infrarrojo

Es importante identificar la polaridad del led infrarrojo (el conductor más largo indica la carga positiva).

Los modelos de lápices infrarrojos dependen del ingenio y materiales con lo que se desee construir. Algunos ejemplos de lápices construidos por los profesores son:


Ilustración 88: Modelos de lápices infrarrojos

## El software smoothboard

Uno de los programas que permite la sincronización de los utensilios para formar el artefacto digital, es el smoothboard (http://www.smoothboard.net/).

Al descargar e instalar el software, se debe considerar que la computadora a utilizar debe tener conectividad bluetooth.

El software de inicio, presenta una interface que indica el estado de conexión con el Wii mote. (Ilustración 89)


Ilustración 89: Inicio del programa

Cuando se ha agregado correctamente, se lanza una ventana de configuración. (Ilustración 90)

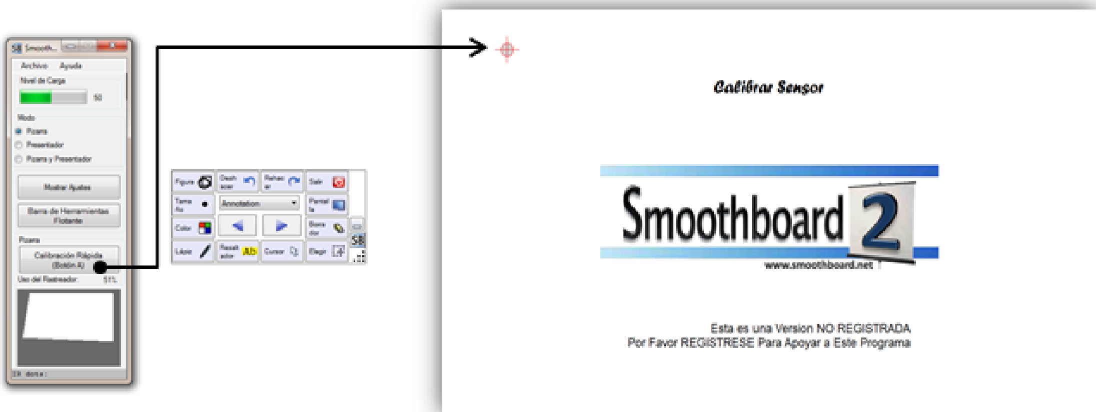



Ilustración 90: Lanzamiento de la interface

La calibración consiste en sincronizar el led del lápiz infrarrojo con el wiimote, lo que determina la superficie interactiva, por lo que el control wii debe dirigirse hacia el área de proyección.

Accionar el pulsador del lápiz infrarrojo equivale a hacer clic con el ratón. De ahí la importancia de ser muy precisos en este proceso. Entre más cerca se dé clic de la marca visual de la calibración, más preciso será el control sobre la superficie.

Aunque el software smoothboard, contiene una sección de herramientas que permite utilizarlo en distintos ámbitos, para los fines de esta investigación, sólo se ha utilizado la interactividad de la superficie, conjugado con otro software como Cabri.

El sistema que permite la superficie interactiva, se muestra a continuación. (Ilustración 91)

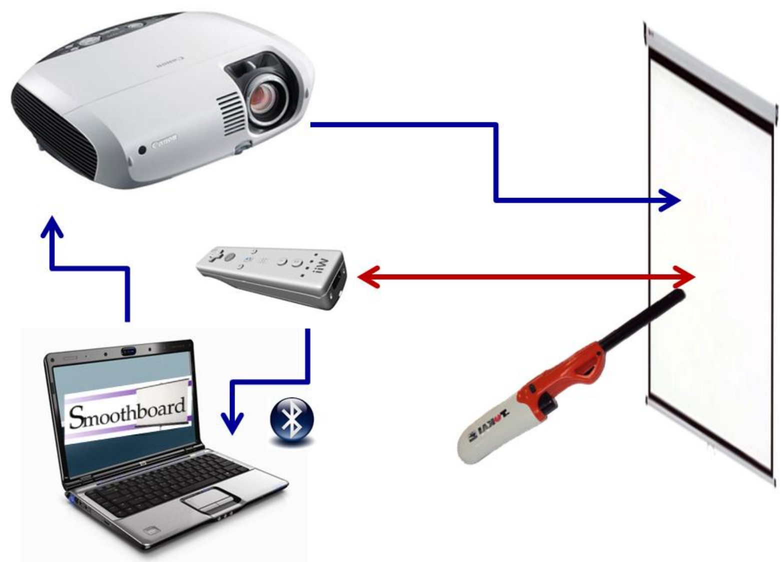



Ilustración 91: Sistema que conforma la superficie interactiva

El proceso de apropiación del medio digital, incluyó el diseño del lápiz infrarrojo. Esto llevó a dedicar una sesión a la construcción del dispositivo. (Ilustración 92)

Ilustración 92: Diseño del lápiz Infrarrojo

## Resolución de problemas en medios distintos.

En el transcurso de las sesiones de trabajo, se propusieron problemas matemáticos que involucraban el concepto de lugar geométrico y cuya resolución se solicitó en dos momentos. Primero se requirió una respuesta a papel y lápiz y posteriormente, bajo un ambiente de geometría dinámica pues nos interesaba contrastar el tipo de argumento que sustentaban ambas respuestas.
A continuación describimos los problemas que se discutieron a nivel grupal.

### Problema 1. Mitad del ángulo

El primer problema planteado consistió en encontrar el lugar geométrico de los puntos P que determinaran un ángulo de la mitad de magnitud de otro ángulo dado y opuesto en un mismo cuadrilátero.

Nos interesaba explorar las estrategias que seguían los profesores y cómo relacionaban las propiedades establecidas. Para obtener evidencia directa de la comprensión del problema, se dispuso un ángulo inicial de $60°$ de manera que el cálculo de la mitad de esta magnitud, no fuera el problema central.

El problema se presentó de la siguiente manera. (Ilustración 93)

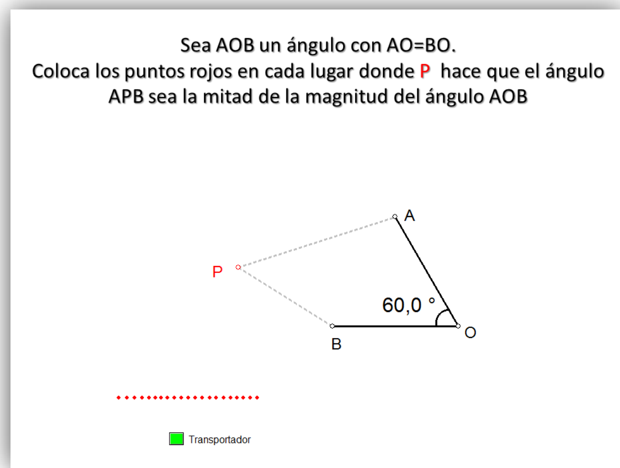



Ilustración 93: Mitad del ángulo

El interactivo contenía un transportador que se podía mostrar a  través de un botón que lo llamaba. Ésta herramienta aparecía colocada de manera precisa sobre el punto P, de manera que sugiriera una lectura directa de la magnitud del ángulo APB. Por ejemplo, la siguiente ilustración muestra la construcción de un paralelogramo AOPB, puesto que el ángulo construido mide $60°$, magnitud idéntica al del ángulo inicial.

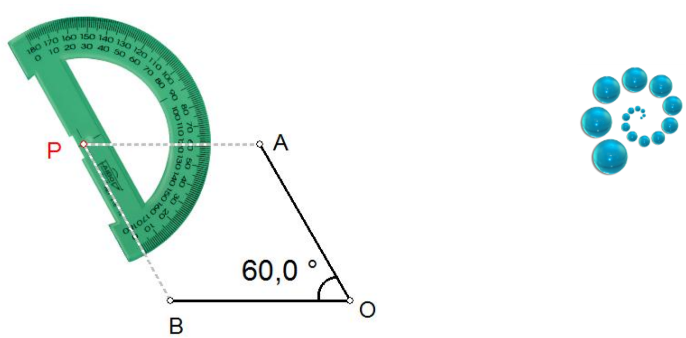



Ilustración 94: Transportador

Consideramos necesario incluir al transportador, como un modelo de transición entre la manera de medir ángulos en papel y lápiz y el medio digital.

**Problema 2. Homotecia**

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, se trata de explorar el comportamiento del punto medio de un segmento AB cuyo extremo B es independiente a dicha circunferencia. (Ilustración 95). De nuevo, la regla tiene un papel de transición.

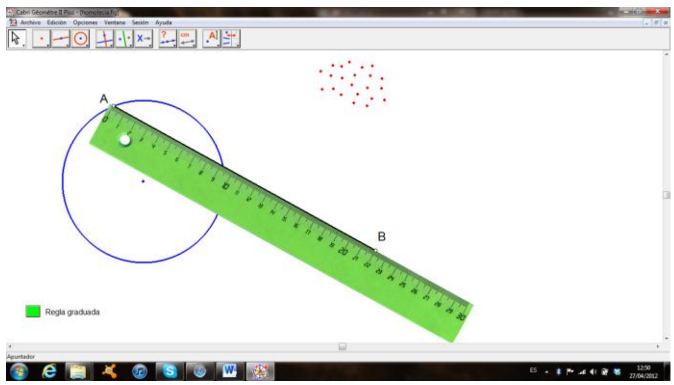



Ilustración 95: Círculos homotéticos

**Problema 3. Semejanza**

Una escuadra se desplaza sobre una regla. Ambos instrumentos están graduados. Dado un segmento cuyos extremos se encuentran en el número 1 de la regla y en el 16 de la escuadra, se estira a medida que se desliza la escuadra sobre la regla.

Se explora el comportamiento de un punto, en particular el punto medio, del segmento AB, cuando la escuadra se desliza sobre la regla. (Ilustración 96)

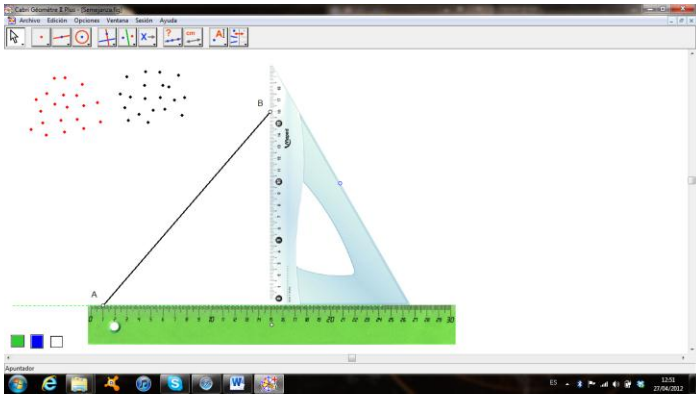



Ilustración 96: Semejanza de triángulos

**Problema 4. Triángulos de la misma base y área**

Dado un triángulo ABC, encontrar las posiciones de un punto P en el plano, que permita obtener otro triángulo no semejante a ABC, pero que contenga la misma área. (Ilustración 97)

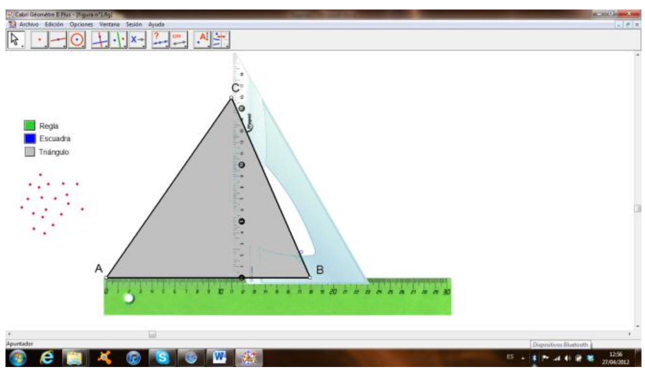



Ilustración 97: Familia de triángulos

## Recopilación de los datos.

La recopilación de los datos se llevó a cabo mediante el registro gráfico que los profesores plasmaron sobre pizarrón blanco, lo cual se filmó y fotografió durante todo el proceso.

Se realizaron seis entrevistas video-grabadas durante la ejecución de las tareas diseñadas; en ellas, se registraron diversas manifestaciones cognitivas (gestos, comentarios verbales sobre lo que iba aconteciendo, movimientos corporales, exclamaciones, etc.).

Las evidencias que se obtuvieron cuando los profesores resolvían problemas usando una computadora, fueron posibles a través del software *camtasia studio* (un editor de video que permite realizar capturas de la pantalla en tiempo real), que permitía capturar en tiempo real la secuencia de pasos que se seguían los estudiantes-profesores mientras se resolvía el problema. Los archivos fueron recuperados en formato .mp4.

CAPÍTULO VII

# ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

## Introducción

Para la descripción de los procesos cognitivos que siguen los estudiantes-profesores cuando existe mediación instrumental, en este estudio consideramos adecuado recurrir a la investigación de corte cualitativo. De este modo se pretende observar de manera cuidadosa características básicas de las acciones de los estudiantes-profesores y las interacciones que logran establecer con el medio (como individuos y como grupo de trabajo).  De ahí la importancia de utilizar el estudio de casos como instrumento experimental,  puesto que la información recopilada representa situaciones más típicas que se presentan en ambientes similares de aprendizaje.

En un primer momento, se describirá el proceso de resolución de dos problemas que involucran el concepto de lugar geométrico en el seno de la interacción generada en el grupo de estudiantes-profesores.
En una segunda parte, se reflexionará en torno al análisis de tres casos de estudiantes-profesores a los que se les plantaron problemas en un plano individual. Este análisis nos permitirá establecer ya unas primeras conclusiones de las que se hará un bosquejo en el capítulo siguiente.

## Solución grupal de problemas geométricos

Las actividades que se muestran a continuación, tienen el propósito de explorar la evolución del concepto de lugar geométrico en los profesores.

En principio, se planteó el problema en la que los profesores tendrían que obtener un lugar geométrico específico usando lápiz, papel, escuadra, transportador y compás.  Cada actividad se desarrolla después en un entorno interactivo donde, en primer instancia, se permite manipular los objetos matemáticos involucrados. El profesor explora las posibilidades y soluciones particulares a cada problema a través de puntos móviles que va depositando en cada solución encontrada. Cada punto trasladado, otorga un nuevo rasgo al lugar geométrico que se espera obtener. Los maestros transitan en una visualización cada vez más precisa del locus.

### Problema 1: Mitad del ángulo

El primer problema planteado consistió en encontrar el lugar geométrico de los puntos P que determinaran un ángulo de la mitad de magnitud de otro ángulo dado y opuesto en un mismo cuadrilátero.

Nos interesaba explorar las estrategias que seguían los profesores y cómo relacionaban las propiedades establecidas. Para obtener evidencia directa de la comprensión del problema, se dispuso un ángulo inicial de $60°$ de manera que el cálculo de la mitad de esta magnitud, no fuera el problema central.

El problema se presentó de la siguiente manera. (Ilustración 98)

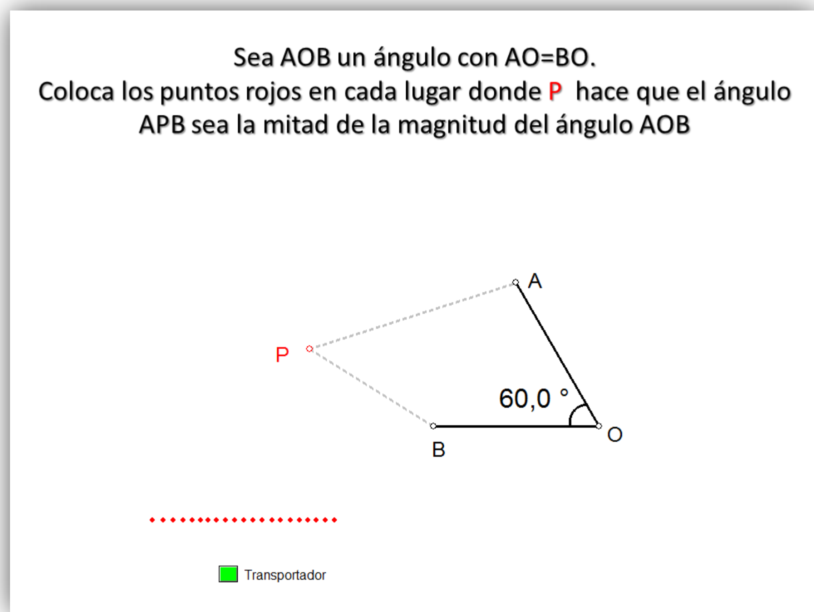



Ilustración 98: Mitad del ángulo

Los intentos de resolución a lápiz y papel, muestran ideas interesantes que los profesores intentan articular para encontrar la solución.

El profesor Víctor, reconoce que una parte de la solución está relacionada con la circunferencia que pasa por A y B y tiene centro en O, por la relación entre ángulo central e inscrito. Sin embargo, afirma que el conjunto solución debe ser una curva que contenga esta circunferencia pero que también pase por el punto P exterior a ésta, que también es solución particular. El profesor bosqueja el siguiente trazo. (Ilustración 99)

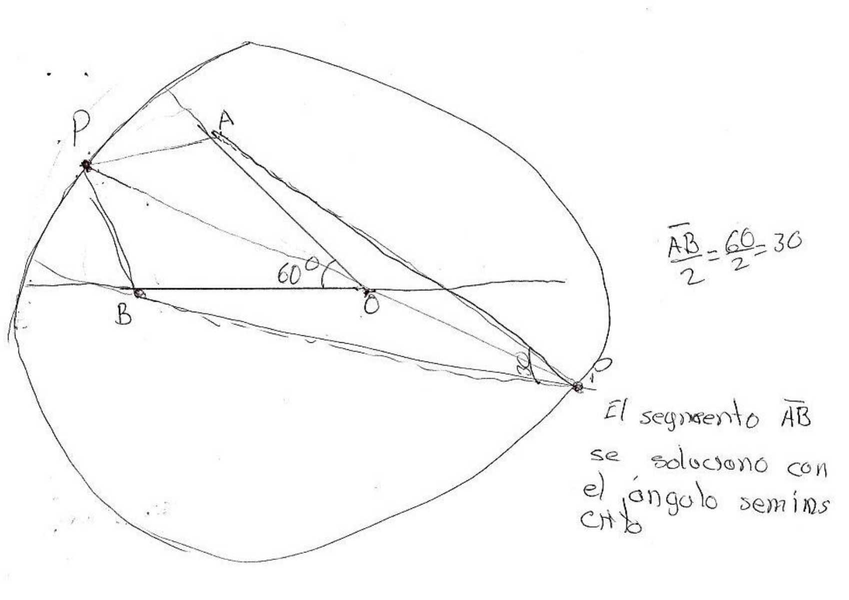



**Ilustración 99: Solución del Víctor**

En el dibujo coloca un punto P’ a la derecha del punto O, que parece pertenecer a la circunferencia con centro O y que pasa por AB, es decir, una posición de P que cumple la condición inicial. También muestra un punto P a la derecha de la recta que pasa por AB (sin dibujarla), que hace que el ángulo APB mida 30º, como lo sugiere la imagen del problema que se está proyectando.

El lugar geométrico propuesto por el profesor Víctor es confuso.

Otra solución, ofrecida por el profesor Armando, (Ilustración 100), muestra un cuadrilátero AOBP involucrado. El profesor explica que es importante considerar los ángulos OAP y OBP, a quienes llamó $x$ y $y$, respectivamente. El profesor afirma que $x + y = 270°$

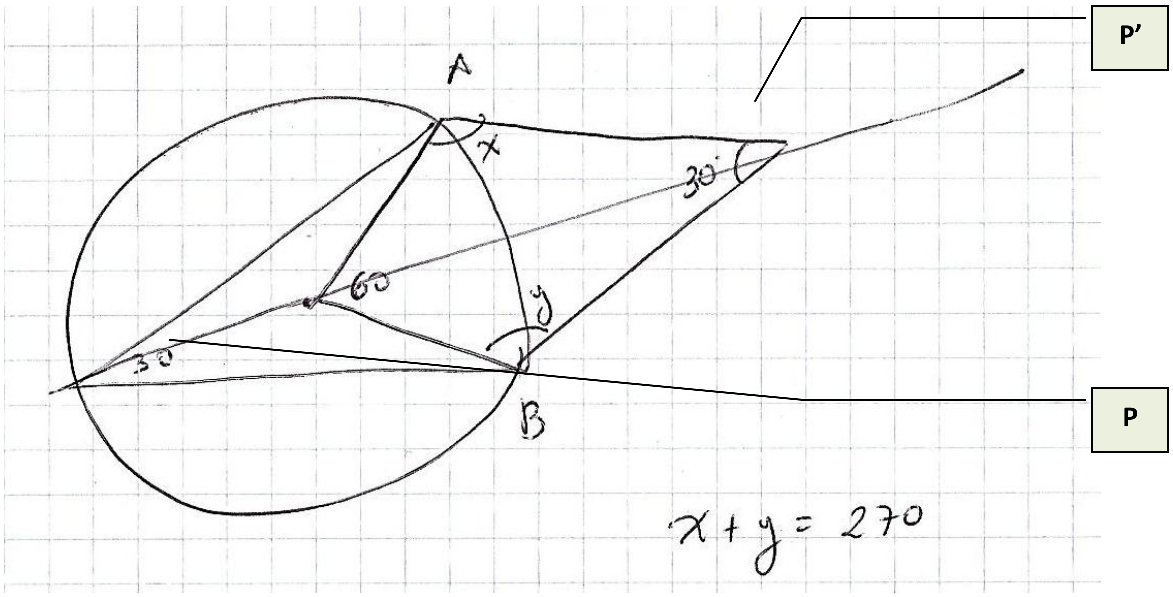



Ilustración 100: Solución de Armando

El profesor sólo ha identificado a la circunferencia con centro O y que pasa por A y B, como el lugar donde se debe encontrar el punto P.

Otra propuesta de solución, diseñada por la profesora Alejandra (ilustración 101), involucra dos circunferencias del mismo radio. La primera es una con centro en O y que pasa por A y B,  que relaciona el ángulo central con los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.  La segunda tiene un origen poco claro: la profesora trazó la bisectriz del ángulo AOB y su intersección con la circunferencia anterior, le sirvió como centro para trazar otra circunferencia con el mismo radio. Obtiene un cuadrilátero AOBP que resalta dibujándolo aparte. La profesora resalta el punto P que identifica con la segunda circunferencia y afirma que mide 30º sin ofrecer mayor justificación.

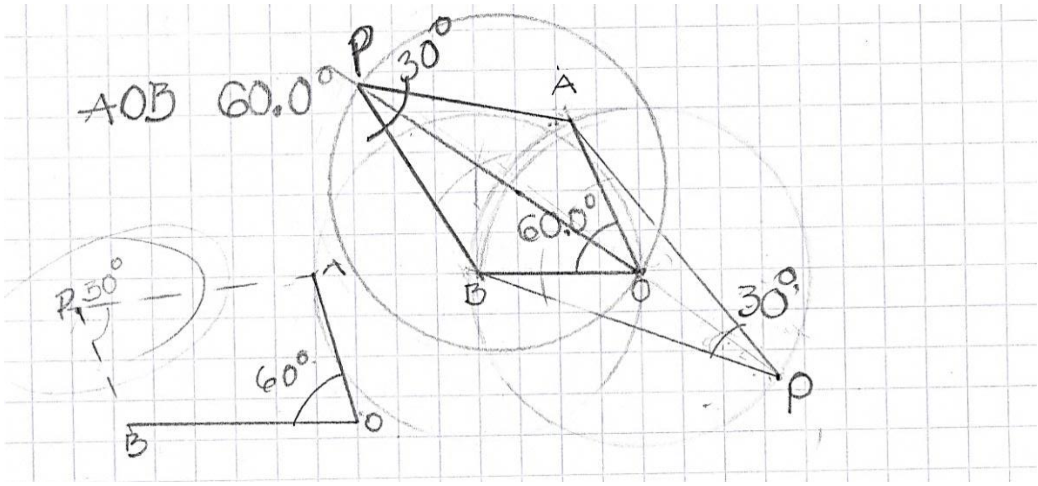



Ilustración 101: Solución de Alejandra

Por su parte, la profesora Rosalinda (Ilustración 102), dibuja dos circunferencias distintas. La primera muestra el ángulo central AOB y el ángulo de 30º como dos ángulos relacionados en una circunferencia con centro O y que pasa por AB. Después traza la bisectriz del ángulo central  toma como centro la intersección de esta recta con la circunferencia anterior y bosqueja otra circunferencia mayor a la anterior pero que pasa por el punto O. La profesora afirma que con ello se obtiene otro ángulo de 30º.

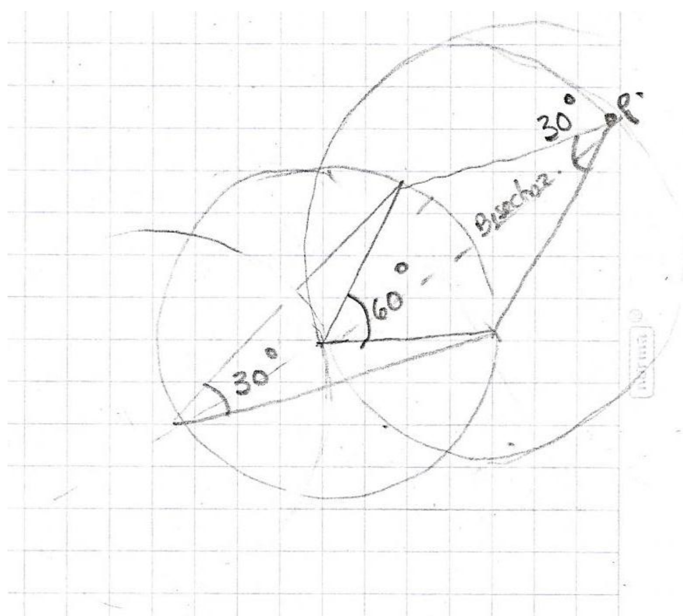



Ilustración 102: Solución de Alejandra

Finalmente, José y Claudia proponen la siguiente solución: traza la circunferencia con centro en O y que pase por A y B. El punto P debe estar sobre esta circunferencia por la relación que guardan los ángulos centrales con los inscritos que subtienden el mismo arco. Sin embargo, consideran que también el arco AB determinado por el ángulo central AOB es solución al problema. (Ilustración 103).

José y Claudia trazan la mediatriz del segmento AB y localizan en ella un punto cuya distancia a A es igual al segmento OA. Afirman que también la circunferencia construida es solución al problema. Es decir, el conjunto de puntos solución son ambas circunferencias.

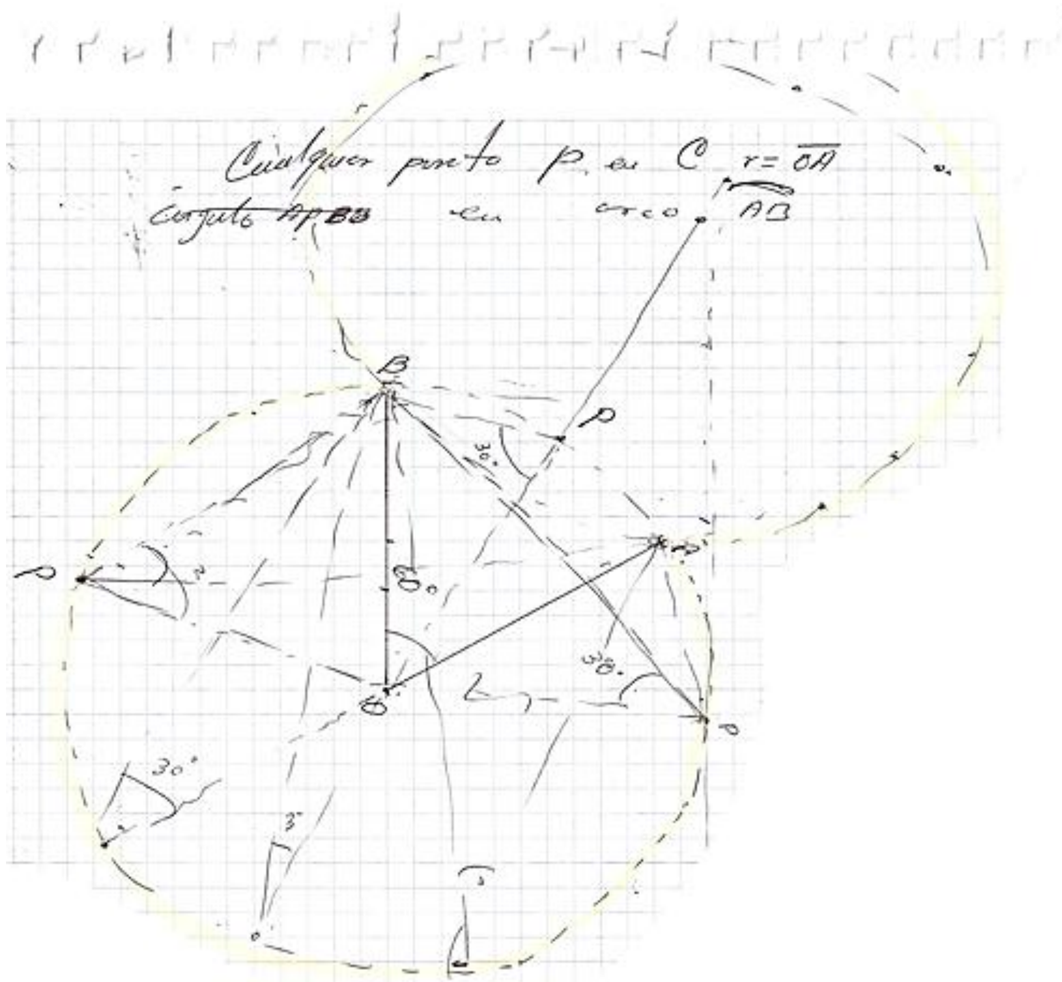



Ilustración 103: Solución conjunta de José y Claudia

### Refracción digital

Se proyectó el mismo problema, a través de la superficie interactiva, con una construcción diseñada en Cabri, pero insertada en una presentación de Power Point (**pps**). El entorno solo permitía al profesor usar las herramientas diseñadas para tal efecto. La interface inicial fue la siguiente:

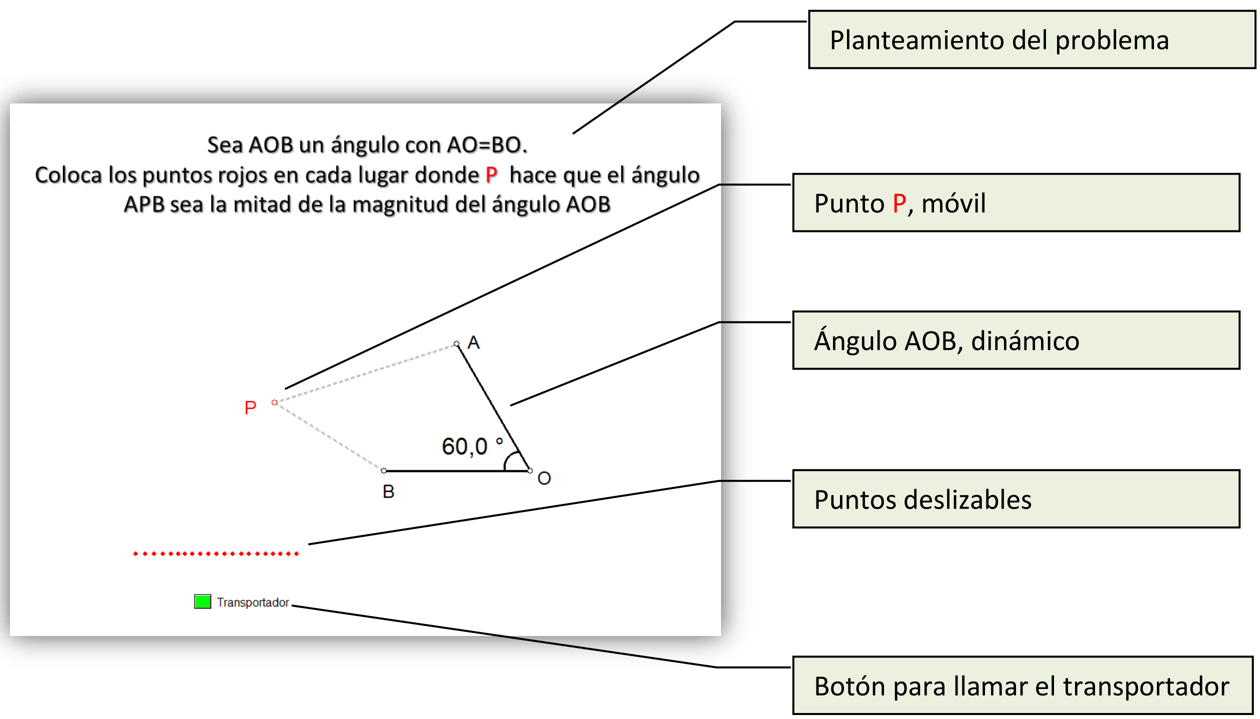



Ilustración 104: Planteamiento del problema

El interactivo contenía un transportador que se podía mostrar a través de un botón que lo llamaba. Ésta herramienta aparecía colocada de manera precisa sobre el punto P, de manera que sugiriera una lectura directa de la magnitud del ángulo APB. Por ejemplo, la siguiente ilustración muestra la construcción de un paralelogramo AOPB, puesto que el ángulo construido mide 60°, magnitud idéntica al del ángulo inicial. (Ilustración 105)

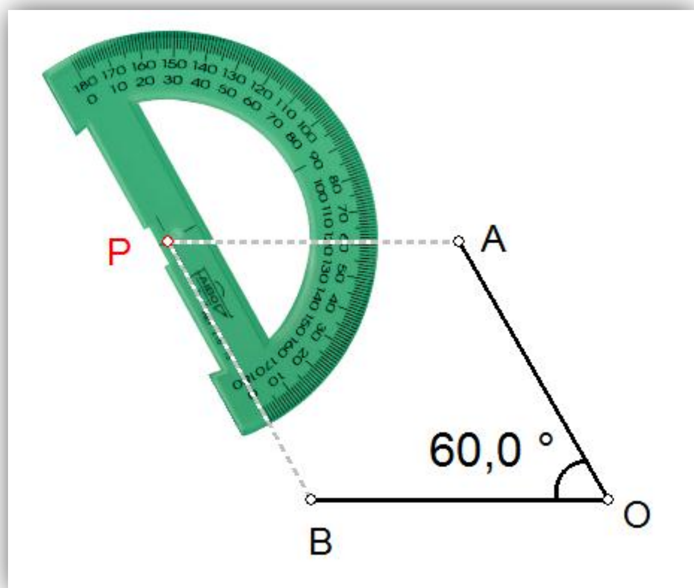



Ilustración 105: Uso del transportador

El primero en interactuar con la versión dinámica el problema fue el profesor Javier. Al interactuar con la superficie, identificó rápidamente algunas posiciones que debería tener P. (Ilustración 106)

Ilustración 106: Casos particulares

El  transportador le permitió localizar 11 posiciones exactas para P. La siguiente imagen es una reproducción de la pantalla generada en el entorno pps. (Ilustración 107)

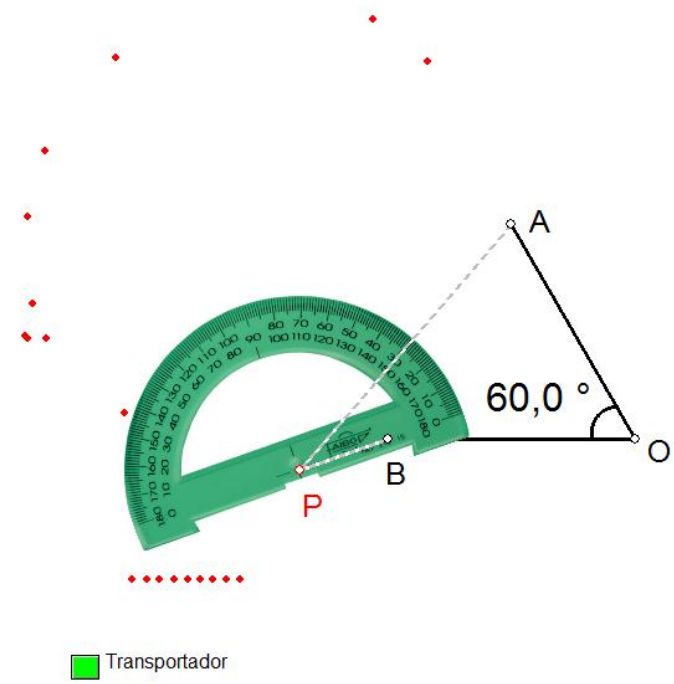



Ilustración 107: Once soluciones particulares

Una conjetura inicial que emergió de inmediato fue comentada por la profesora Monserrat:

Monserrat: *Mientras más lejos esté (el punto P del arco AB), más pequeño es el ángulo y mientras más cerca (de dicho arco) aumenta*

El comentario describe el comportamiento de la magnitud del ángulo cuando P se desplaza. Si P se ubica cada vez más lejos de la recta que pasa por AB, el ángulo disminuye y si se va acercando el ángulo aumenta su magnitud.

Con este hecho, los profesores podían determinar cómo ajustar la posición de P cuando el valor del ángulo no coincidía con el solicitado.

La exploración inicial resultó en soluciones particulares al problema. Cuando se van colocando los puntos rojos sobre cada posición de P que satisface la condición, se logra una visualización de un *locus provisional*, acompañada de una conjetura. Los profesores asocian este primer acercamiento a puntos que *deben formar una curva*. En particular, dos profesores comentan:

Javier: (los puntos) *Deben formar una parábola… que abre…*

Ernesto: *Yo creo que debe ser como una elipse.*

Diana: *Como una elipse. O un círculo. Sí. Como una elipse.*

En este momento, los profesores empiezan a manifestar que la solución del problema deben ser dos circunferencias, la primera, la que se empieza bosquejar con los 11 puntos y la segunda, la que ellos han argumentado que lo es, la circunferencia con centro O y que pasa por A y B.

El transportador permitió encontrar soluciones particulares del problema, como si éste estuviera siendo resuelto prácticamente en papel y lápiz. El papel de esta interface es el de proveer un estado transitorio del objeto en exploración con cierta dosis de interactividad sin perder la esencia concreta de la situación.

Se mostró entonces una tercera interface. Ésta consistía en la misma construcción del ángulo AOB y el ángulo APB, pero ahora sin el transportador. Se sustituyó esta herramienta por una etiqueta que iba mostrando el valor del ángulo APB, mientras al punto P se le activaba su traza:

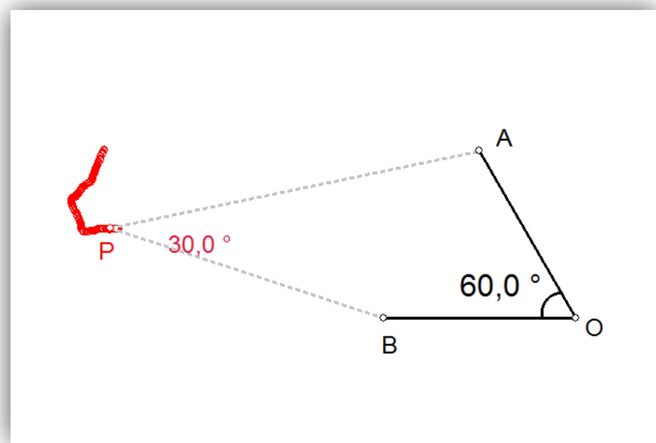



Ilustración 108: Tercera interface del interactivo

Ahora tocó el turno al profesor Víctor, cuya solución en papel y lápiz del problema se ha descrito anteriormente.

Víctor: La idea que yo tenía es que este punto describía una circunferencia, que en algún  momento giraba…

El profesor hace un movimiento circular con su mano trazando un arco que no contiene a A ni a B. (Ilustración 109)

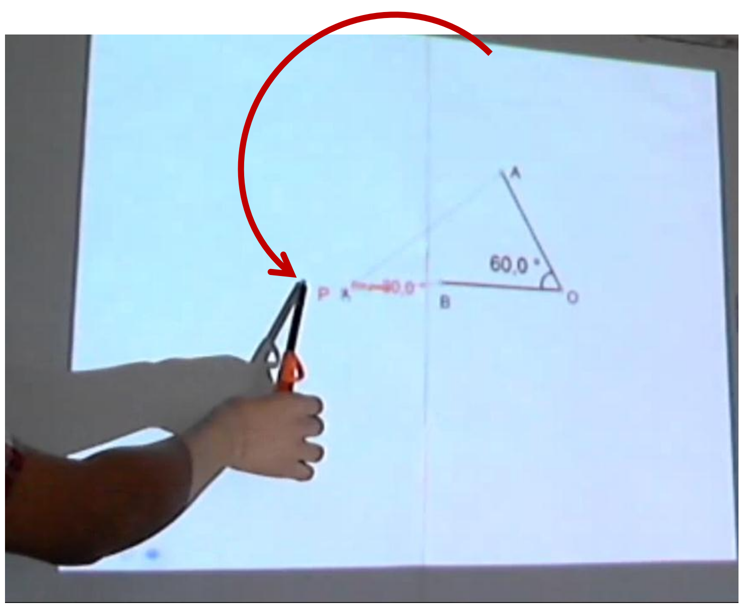



Ilustración 109: Circunferencia de Víctor

Víctor: Y de todas maneras, como este… si consideramos desde el principio que este (el punto O) es el centro de una circunferencia y este (AOB) un ángulo central. Al ser un ángulo central, todos los puntos que estén en esta circunferencia sería… un punto sobre la circunferencia, sería un ángulo inscrito. (Ilustración 110)

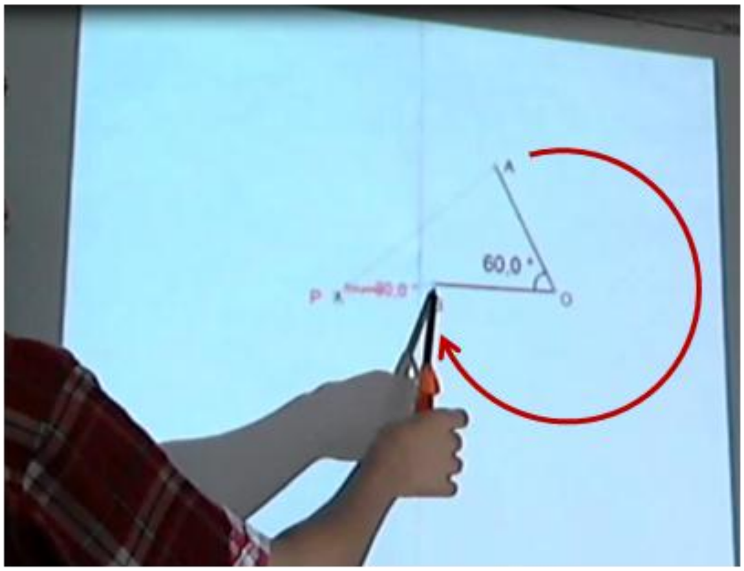



Ilustración 110: Ángulo inscrito

Víctor: Entonces por la, este… ¿qué es una propiedad o un teorema?, que dice que la… el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que lo… que lo este… se me fue la palabra.

El profesor Víctor, hace uso de esta tercera interface y muestra la traza que va dejando el punto P, mientras procura que el ángulo sea siempre de 30º. (Ilustración 111).

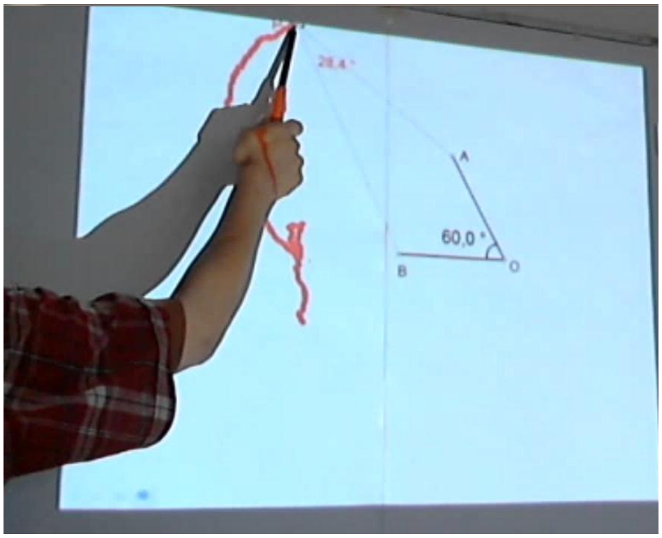



Ilustración 111: Traza

Los puntos iniciales, van delimitando el conjunto de posiciones de P.

Los profesores, por su parte, trataban de ajustar los dibujos que registraron en sus cuadernos a alguna de las curvas cónicas.

El profesor Víctor, borra la trayectoria de su primer intento y empieza una nueva, más precisa. En la siguiente ilustración se muestra su solución a lápiz y papel y lo que va trazando con ayuda del interactivo. (Ilustración 112)

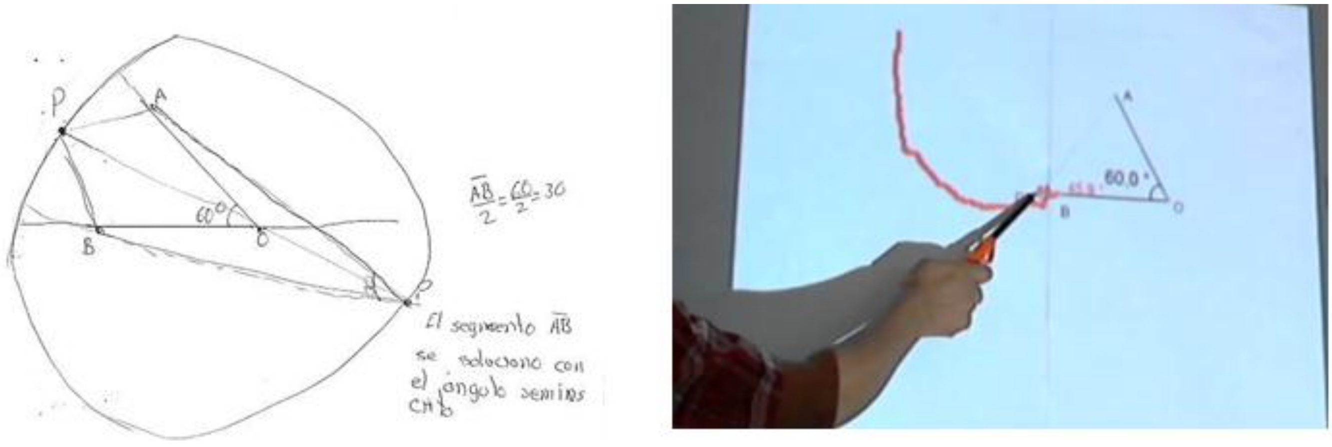



Ilustración 112: Contraste

El profesor Víctor, explica que antes de interactuar con el entorno digital, consideraba que la solución debería incluir una circunferencia con centro en la intersección del arco AB y la bisectriz del ángulo AOB. El radio de la circunferencia que describía era igual al diámetro 2AO. La siguiente ilustración muestra cómo lo describió (ilustración 113)

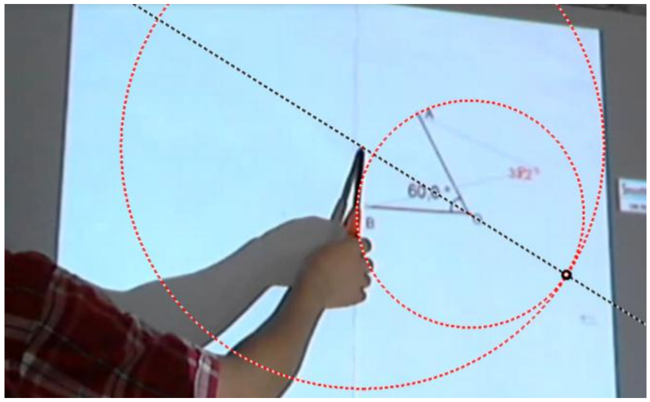


Ilustración 113: Soluciones prematuras

Sin embargo, lo que traza en el interactivo le permite reconsiderar su hipótesis.

Las conjeturas plantean ya un locus asociado a un par de circunferencias que se intersecan. Sin embargo, la región entre A y B es poco clara para los profesores todavía.

La profesora Claudia toma el lápiz infrarrojo y muestra su idea del lugar geométrico que resuelve el problema:

Claudia: El punto P tiene que tener el mismo radio que aquí (BO)

El comentario de la profesora se orienta a describir un rasgo de la circunferencia cuyo centro está en la bisectriz del ángulo BOA y que contiene los puntos A y B

Claudia: Las dos circunferencias van a pasar por los puntos A y B…

La profesora describe las circunferencias con el movimiento de sus manos.

Sobre la naturaleza de la segunda circunferencia, afirma que debe ser la imagen (la reflexión de la circunferencia con centro en O y que pasa por A y B, con respecto a la recta que contiene a A y B). (Ilustración 114)

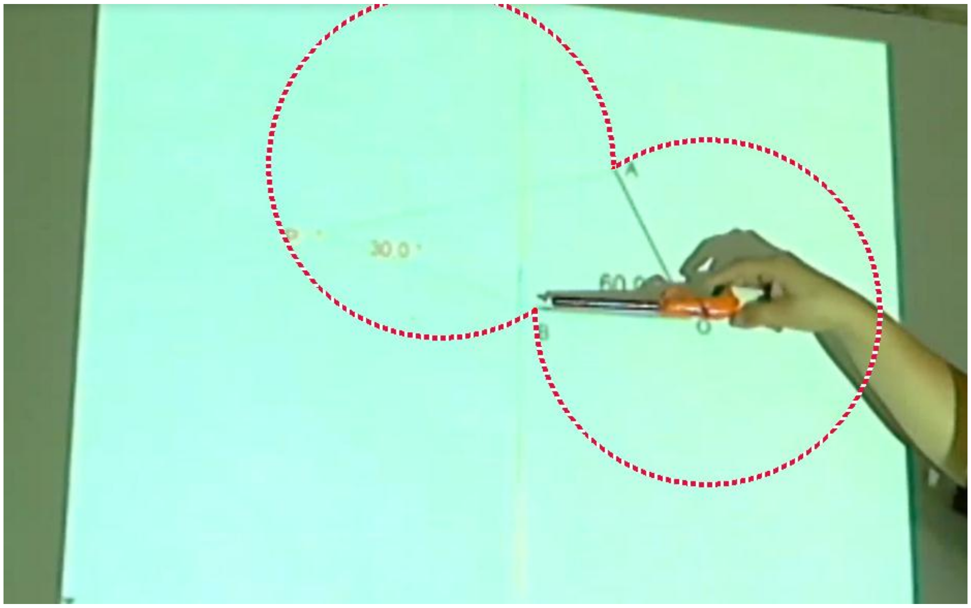


Ilustración 114: Solución

La profesora Claudia, empieza dibuja la trayectoria en la interface 3. (Ilustración 115)

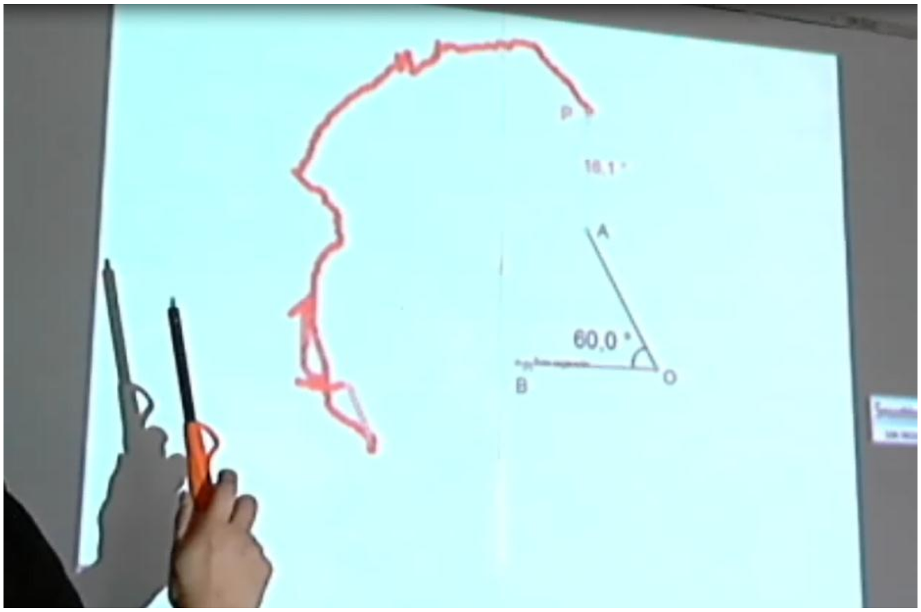



Ilustración 115: Interface 3

En este momento, se preguntó, ¿habrá un punto entre A y B que sea solución al problema? Algunos profesores contestaron que sí. Pero la profesora Claudia, arrastra el punto P a esa región y observa que los valores del ángulo aumentan rápidamente. (Ilustración 116)

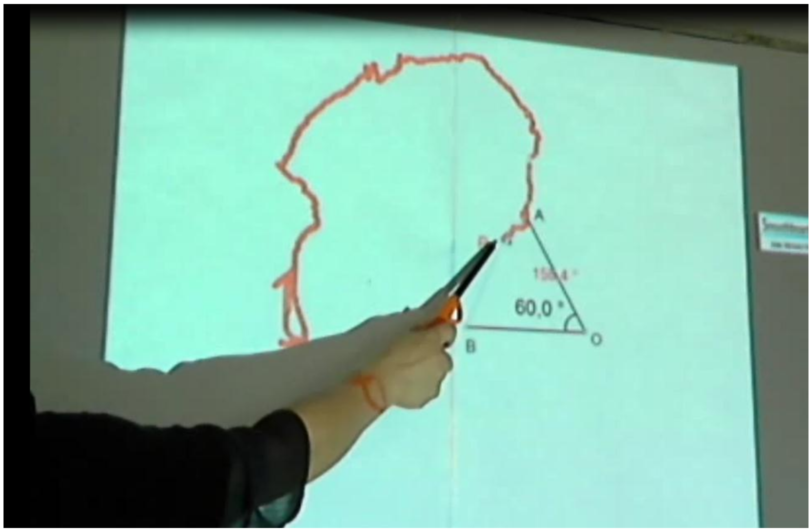



Ilustración 116: Traza

Claudia: (la región entre A y B) No es solución

La profesora Claudia sigue trazando la trayectoria. Salvo la región entre A y B que tuvo que pintar para comprobar la hipótesis de que esa zona no es solución, el lugar geométrico dibujado es una aproximación precisa del locus solución:

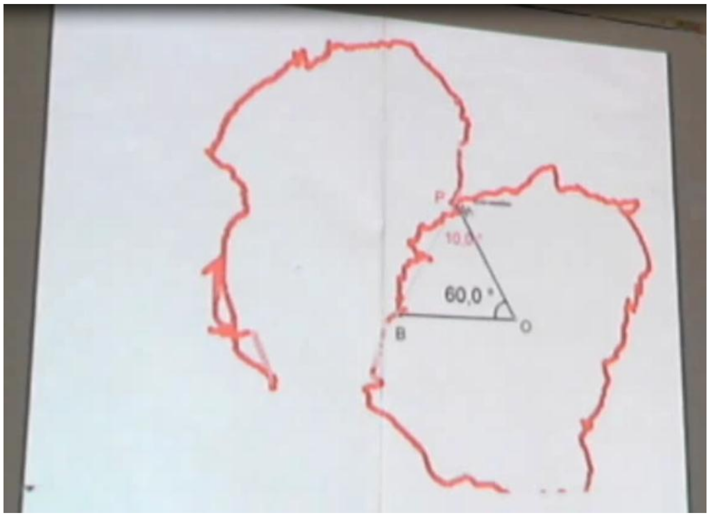



Ilustración 117: Aproximación al locus

El profesor Javier, utiliza el interactivo desde su computadora, y logra una versión más precisa de lugar geométrico. (Ilustración 118)

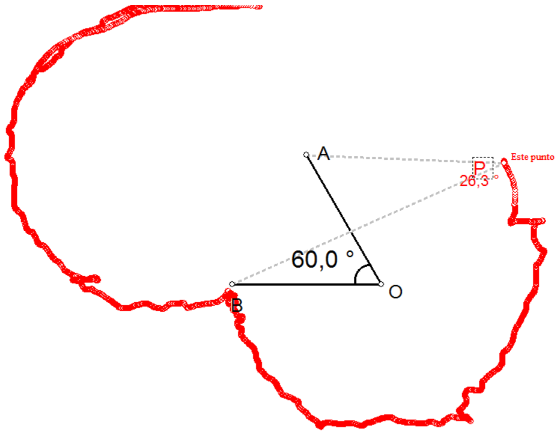



Ilustración 118: Solución desde una computadora

La traza permite la visualización del lugar geométrico que transita entre una versión discreta del locus, a una idea del continuo como rasgo característico del lugar geométrico.

La interface 4 presenta el locus solución del problema. Al mover los puntos A y B, el locus se torna dinámico. La siguiente ilustración muestra el comportamiento del locus solución para distintos ángulos. (Ilustración 119)

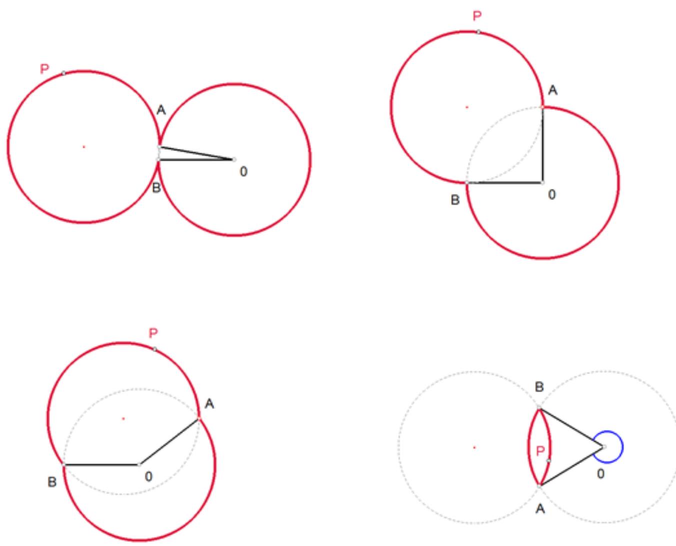



Ilustración 119: iLocus

### Problema 2. Homotecia del círculo

El problema se planteó de la siguiente manera:

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, se trata de explorar el comportamiento del punto medio de un segmento AB cuyo extremo B es independiente a dicha circunferencia.(Ilustración 120)

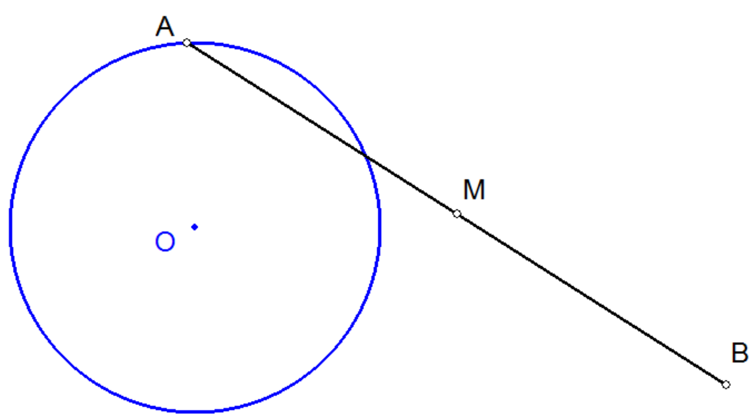



Ilustración 120: Planteamiento del problema

Los intentos de resolución a lápiz y papel confundieron momentáneamente a los profesores. Lo que visualizaron inicialmente fue un cono y una *sección de ese cono* como conjunto solución. (Ilustración 121)

Víctor: Va a salir algo así como… ¿Cómo le diré?...

Entrevistador: ¿Tú dices que lo que vas a formar con todas las líneas es un cono?

Víctor: Ajá. Entonces el punto medio de esto (refiriéndose a un segmento), va a formar una… sección, como una sección de este cono.

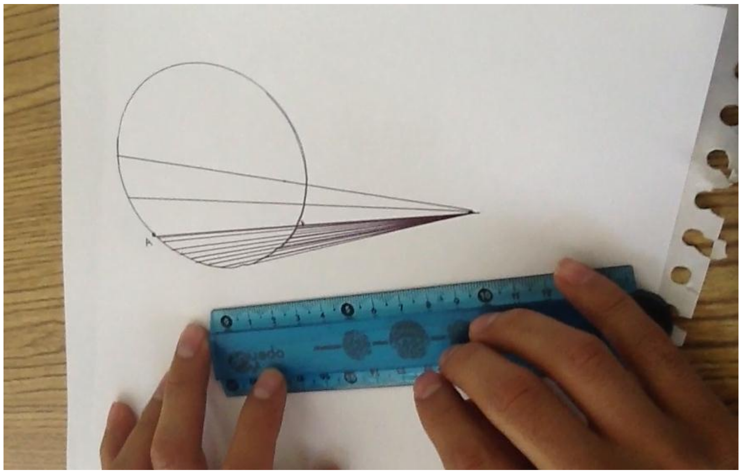


Ilustración 121: El cono

Por su parte, Claudia afirma que el lugar geométrico es un círculo.

Entrevistador: Usted dice que es un círculo, ¿Por qué?

Claudia: Porque me están dando los puntos (medios) y están formando el círculo.

Claudia señala el círculo que contiene a los 4 puntos medio que ha identificado:

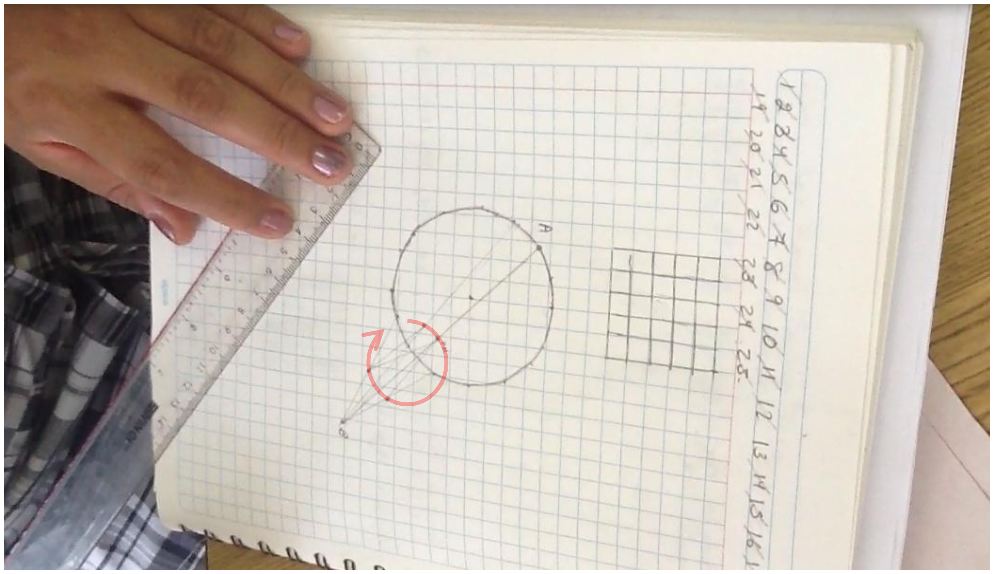


Ilustración 122: Aproximación

Mariana retoma la idea de Víctor y sugiere que la forma es parabólica. Lo muestra a los demás profesores (ilustración 123)

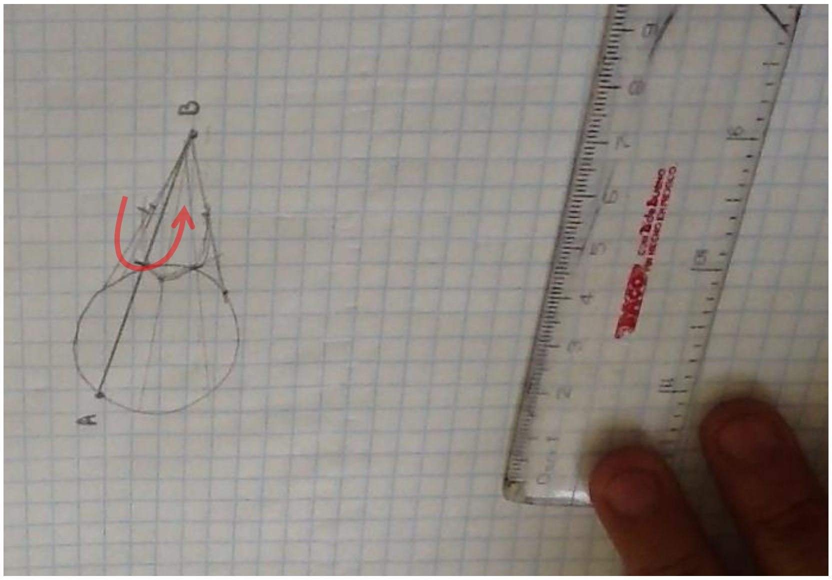



Ilustración 123: Parábola de Mariana

La profesora Edith dice que los puntos forman una línea recta. Ella sólo ha trazado dos ejemplos.

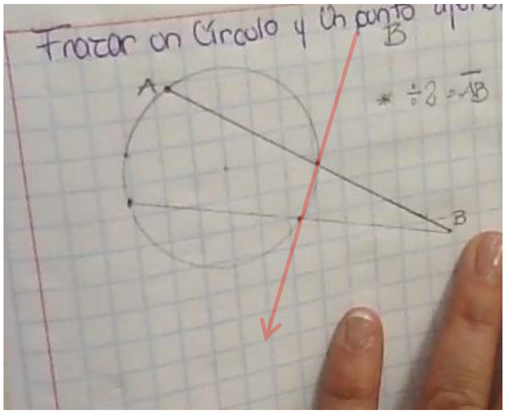



Ilustración 124: Recta de Edith

Entrevistador: Trace otro segmento. Luego localice el punto medio. ¿Dónde quedaría el punto medio?

Edith: ¿Dónde quedaría el punto medio?

Entrevistador: Ya lleva usted tres puntos

Edith: Sí, claro.

Entrevistador: ¿Y están alineados?

Edith: No

Entrevistador: ¿Entonces (el lugar geométrico) es una línea recta?

La profesora Edith guarda silencio mientras analiza su dibujo.

Entrevistador: A ver (trace) otro punto

La profesora traza un segmento más y el resultado parece sorprenderla. Esto no significa que haya reconocido a la circunferencia como solución. Abre la posibilidad de que en este problema no son suficientes 3 puntos para visualizar una circunferencia.

La maestra Claudia pide intervenir ante el grupo y afirma:

Claudia: Es un círculo de la mitad del diámetro de la (circunferencia) original.

Entrevistador: ¿Por qué?

Claudia: Porque estamos tomando el punto medio de la distancia. Estamos tomando el punto medio de los segmentos de cada segmento, pues entonces se forma el círculo. (Ilustración 125)

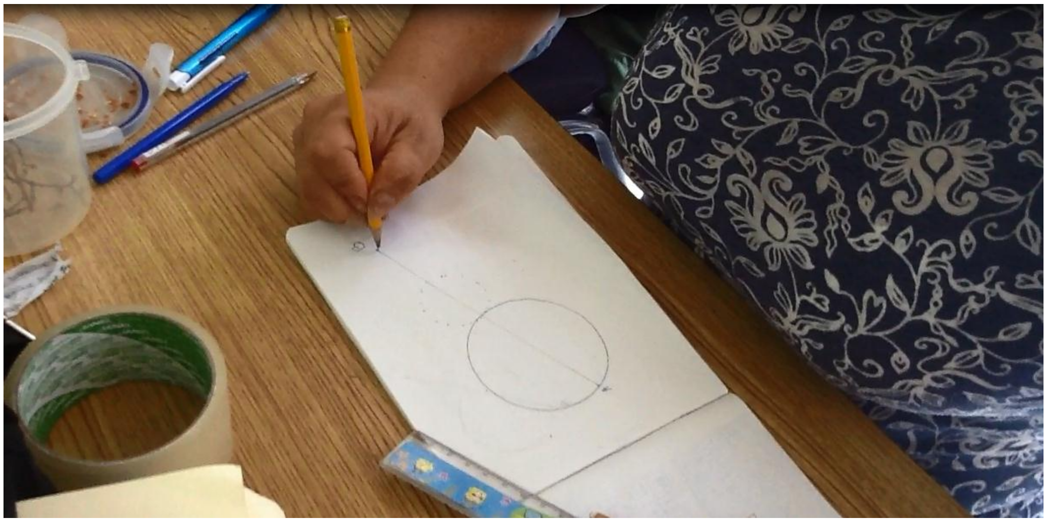


Ilustración 125: Solución de Claudia

El profesor Javier ha elaborado un dibujo en el que ha colocado el punto B en el lado opuesto al resto de los otros profesores. Su argumento es en el sentido de que no esta omitiendo la condición inicial de B un punto ajeno a la circunferencia".

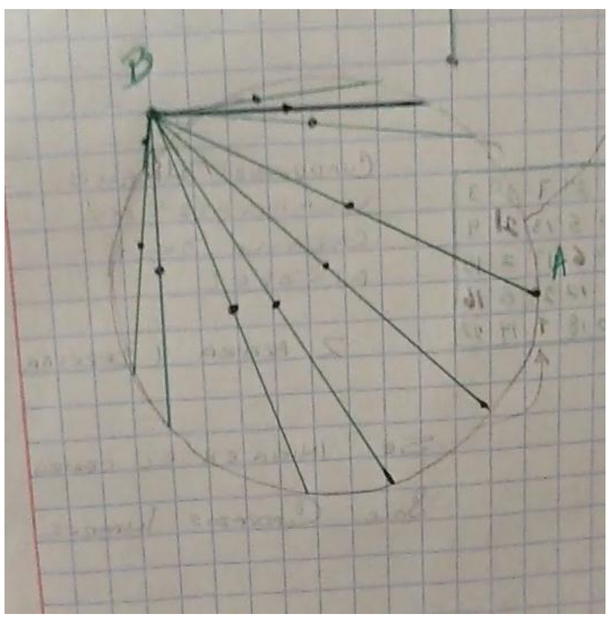



Ilustración 126: Un caso particular

Las hipótesis están planteadas en este momento. Es cuando el profesor Juan José empieza a manipular el interactivo que consiste en trasladar puntos en una ubicación que los convierta en punto solución.

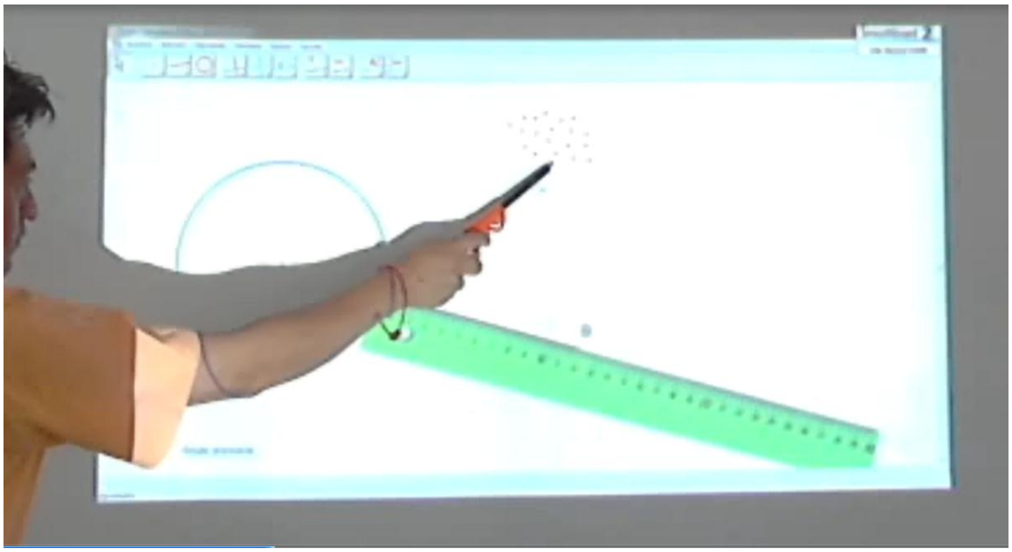


Ilustración 127: Casos particulares

En la siguiente imagen se muestra una captura de pantalla del interactivo en el momento en que el profesor Juan José ha trasladado 13 puntos:

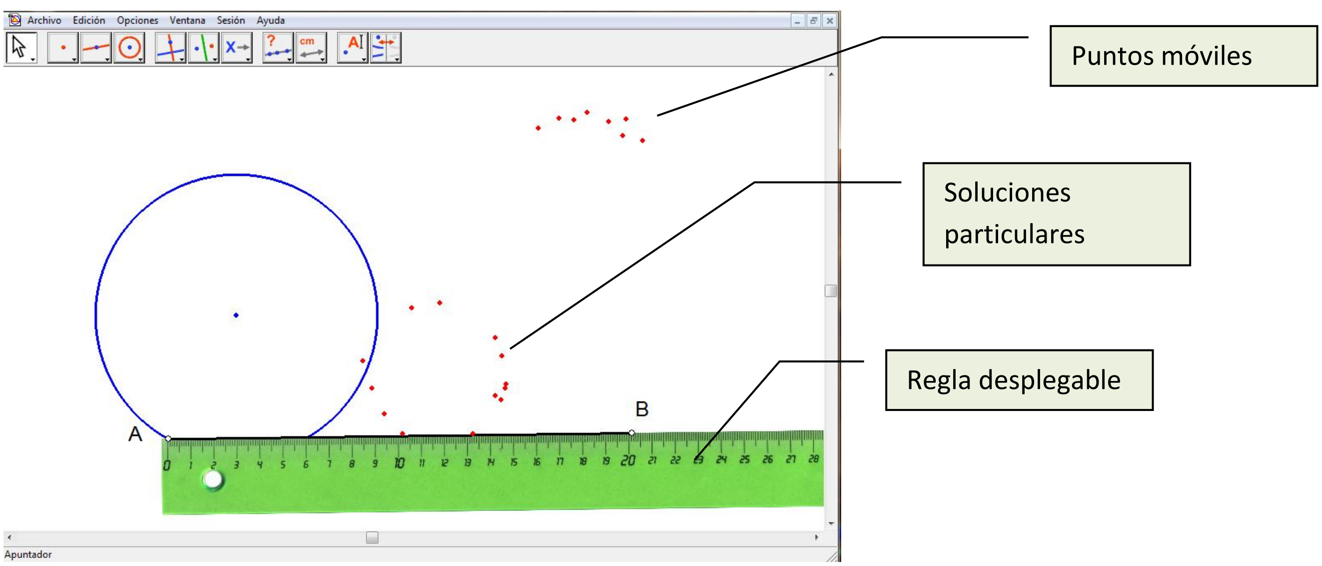



Ilustración 128: 13 Soluciones

Los profesores han visualizado la circunferencia solución.

Ahora se ha invitado a la profesora Claudia, para que manipule el interactivo usando la herramienta *traza* sobre el punto medio.

Al iniciar el movimiento, los profesores han validado el supuesto original. (Ilustración 129)

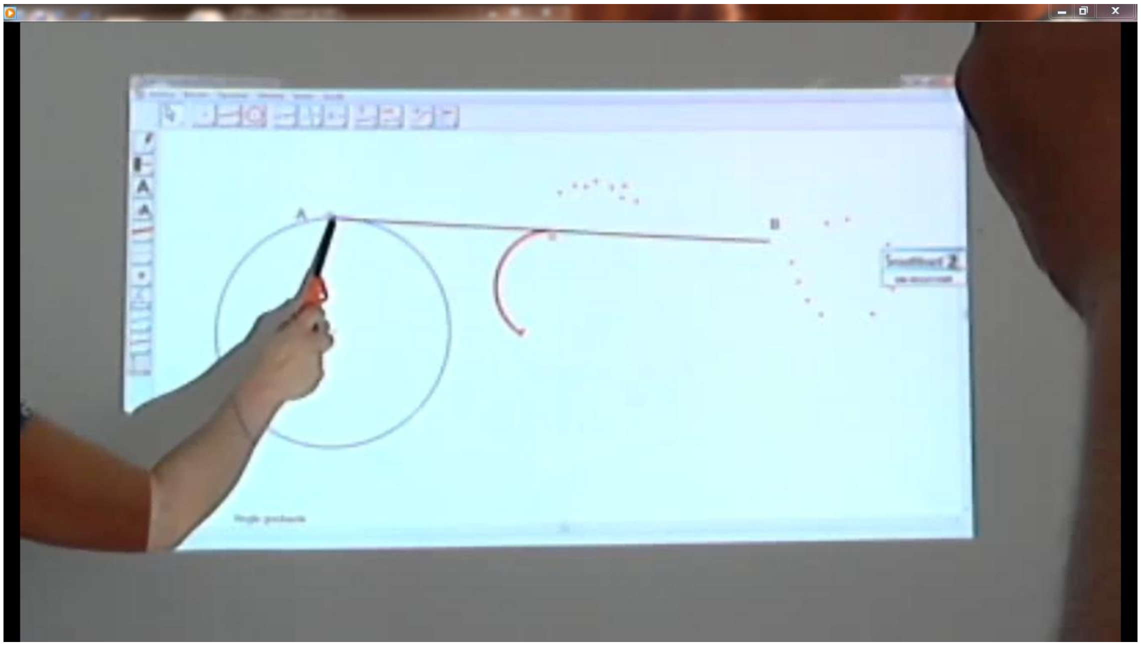


Ilustración 129: Validación

El interactivo permite visualizar rápidamente el lugar geométrico. Esto queda manifiesto cuando se pregunta:

Entrevistador: ¿Con dos segmentos hubiera sido posible?

Grupo: No

Entrevistador: ¿Cuántos puntos necesitaron (en el software) cuando se dieron cuenta de la solución?

Grupo: Pocos, 5,

El lugar geométrico ha quedado determinado. El argumento formal lo ofrece el profesor Víctor, cuando afirma:

Víctor: Se puede por homotecia

Entrevistador: ¿Cómo es eso?

Víctor: Si consideramos que el punto B es el centro de homotecia de la figura, se puede trazar la figura en… como en una reducción. Haciendo una reducción de la figura original.

Ahora, con el lugar geométrico definido, surgió una afirmación:

Juan José: la circunferencia (el lugar geométrico) siempre corta a la circunferencia original.

Esta afirmación se sustenta en la solución particular del profesor Juan José y el caso que se muestra continuación:

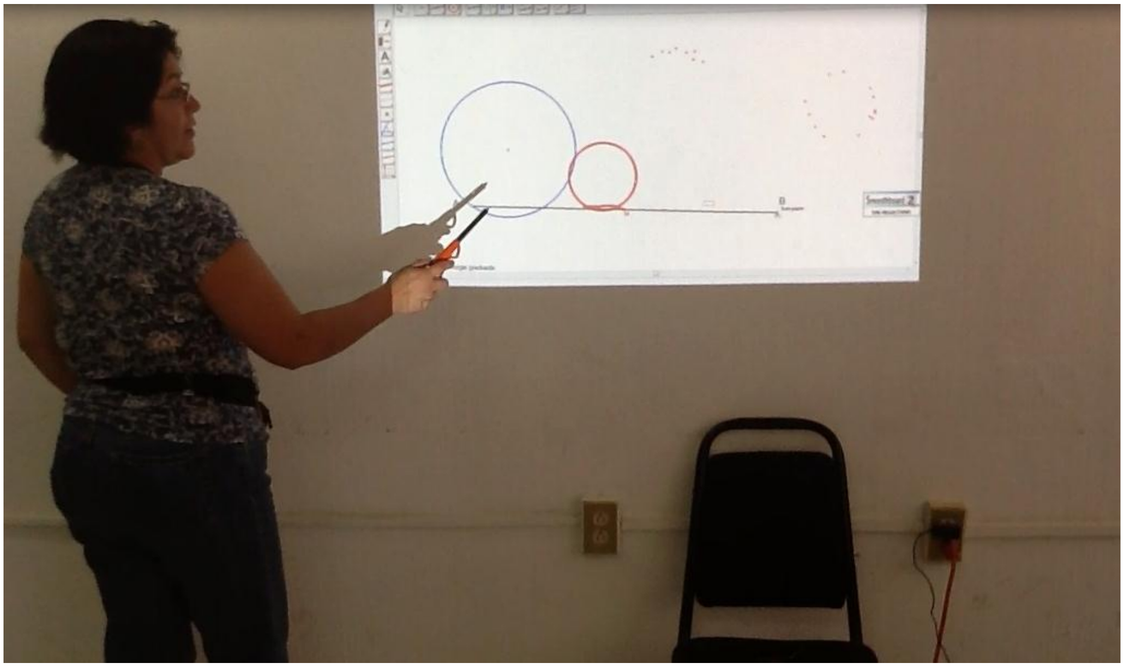


Ilustración 130: iLocus en la exploración de las soluciones del problema

Un segundo caso que realiza la profesora Claudia es cuando B está más alejado de la circunferencia. Antes de obtener la traza, el entrevistador pregunta:

Entrevistador: La circunferencia (solución), ¿va cortar a la circunferencia original?

Grupo: No

Entrevistador: ¿Por qué?

Víctor: Porque  depende de la distancia del punto A al punto B.

Claudia: Porque la distancia es mayor.

Víctor: Mayor que la del diámetro (de la circunferencia original)

Claudia: Este arco pasa por aquí. (Dibuja con el lápiz, sin pintar, una semicircunferencia izquierda de lo que ella supone que el locus, y lo hace lejos de la circunferencia original)

Víctor: Cuando el punto medio sea mayor al diámetro

Esta afirmación en realidad quiere decir que la distancia entre el punto medio y el punto A debe ser mayor al diámetro de la circunferencia original.

La profesora Claudia realiza el trazo.

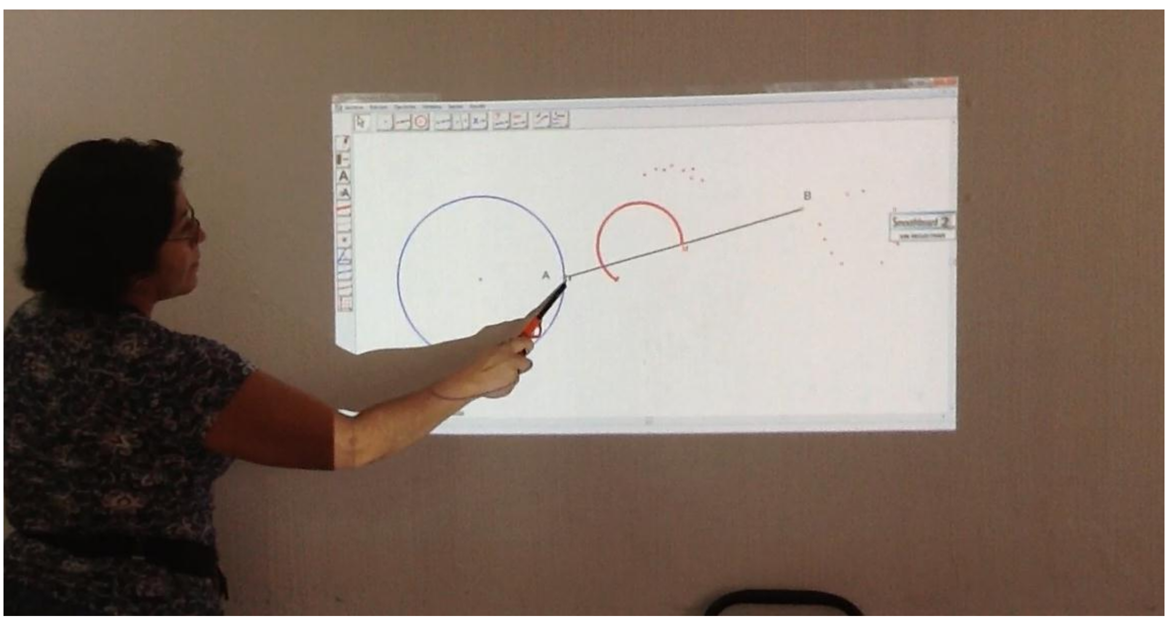



Ilustración 131: El iLocus permite visualizar otro caso

Mientras la profesora Claudia traza el locus, el profesor Víctor comenta:

Víctor: Si es menor al diámetro, queda adentro.

Juan José: Sí es cierto

Finalmente emergió la pregunta si el punto M no necesariamente es punto medio. Se propuso redefinir el punto M como punto sobre el segmento AB.

Algunos casos obtenidos por los profesores, se muestran a continuación:

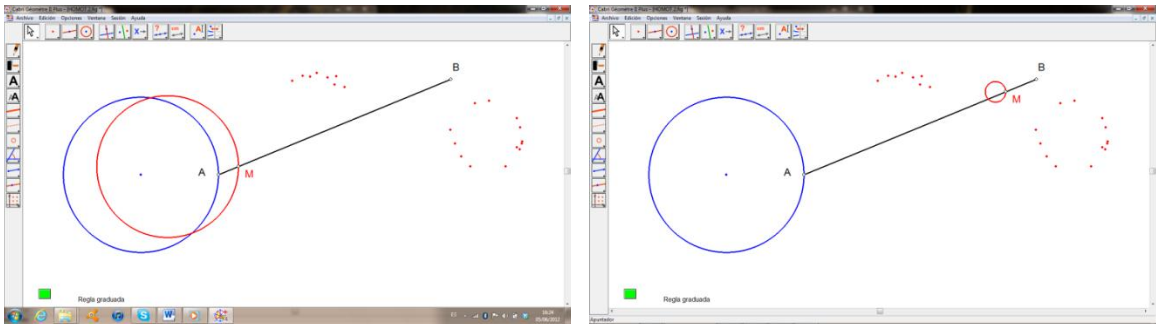



Ilustración 132: iLocus

## Resolución grupal del problema

La resolución grupal de los problemas planteados, permitió un intercambio de opiniones respeto a la naturaleza de la solución. Se propició la elaboración de conjeturas y éstas evolucionaron a consecuencia de la precisión en las condiciones iniciales, por ejemplo en el caso de la mitad del ángulo, desde la solución discreta del problema con Javier hasta la versión general de Claudia.

En el caso del ejemplo 2, la herramienta ya no representó un reto para los profesores. Los docentes habían internalizado la funcionalidad del interactivo y esto se hacía evidente en la manera en que Juan José usaba la regla desplegable para determinar los 13 puntos que forman parte de la solución al problema. En este segundo caso, la imposibilidad de la parábola de Mariana pudo ser verificada visualmente.

El trabajo grupal sobre la SI, permitió generar un ambiente de colaboración en la resolución del problema en la que cada aportación acercaba más al mismo grupo en la identificación de las propiedades del conjunto solución.

A continuación se describirá las acciones individuales que siguen algunos profesores en la resolución de problemas de la misma naturaleza.

## Entrevistas

De los profesores que conformaron el grupo de estudio, se seleccionaron 3 individuos con los que se realizó el estudio de casos. Estos profesores presentaron características similares en cuanto a la disposición al trabajo en equipo y al buen desempeño en el uso de los entornos digitales abordados en el desarrollo de la investigación.

En adelante, los nombres de los entrevistados se resaltarán en rojo y las del entrevistador, así como las reflexiones y comentarios, aparecerán en azul.

### Estudios de caso con Emanuel

---

**Episodio 1: Planteamiento de las condiciones del conjunto de puntos**

El problema (Ilustración 133) que se planteó al *Emanuel* fue:

> En la siguiente figura, el punto **M** se desplaza sobre el plano, de modo que su distancia hasta uno de los puntos fijos **$F_1$** es proporcional a su distancia al otro punto $F_2$, es decir:
>
> $$\overline{MF_1} = k \cdot \overline{MF_2}$$
>
> Explique qué tipo de curva describe **M** a partir del coeficiente de proporcionalidad $k$

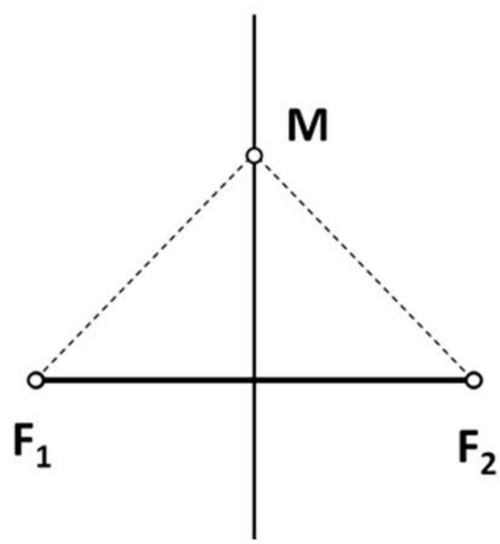



Ilustración 133: Problema planteado a Emanuel

En caso k=1, el participante reconoció inmediatamente a la mediatriz como el conjunto de puntos que satisfacen la condición planteada $\overline{MF_1} = 1 \cdot \overline{MF_2}$

La siguiente transcripción corresponde al análisis que el participante hace del caso k=2.

1. **Emanuel (Em)**: Ok. Para este caso particular, aunque el dibujo no muestre la situación real; si a esta distancia la consideramos "***l***" (el participante se refiere al segmento $PF_1$), dado este factor (refiriéndose a k=2), esta distancia tiene que ser 2 veces "***l***".

*El participante dibuja un triángulo cuyos lados, rigurosamente los define bajo la relación $\overline{2PF_1} = \overline{PF_2}$ en lugar de establecer $\overline{PF_1} = 2\,\overline{PF_2}$, como se muestra en la ilustración 134:*

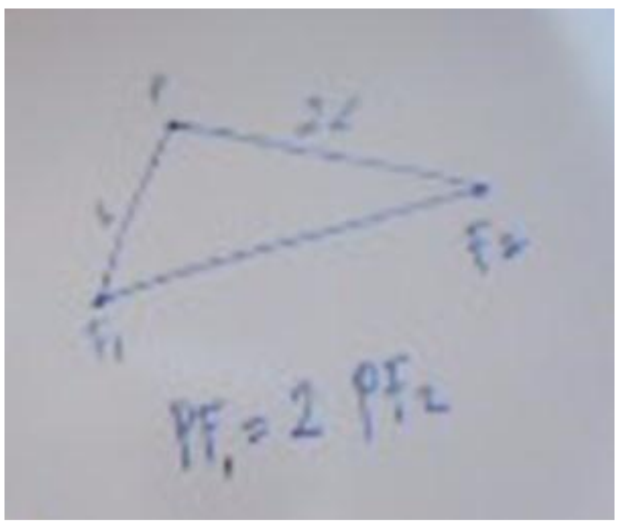



Ilustración 134: Error en la interpretación gráfica de la condición planteada.

*Al observar su construcción recula y replantea su figura:*

2. **Entrevistador (E)**: Calma…

**(Em)**: Ok. Está al revés…

3. **Entrevistador (E)**: Está al revés.

4. **(Em)**: Está al revés…

*El participante redibuja su triángulo.*

5. (**E**): El dibujo que acabas de hacer más bien sería $\overline{PF_1} = \frac{1}{2}\overline{PF_2}$, lo cual sería otro factor. ¿No? Y vamos a hacer esto con 3, 4, 5… Vamos a empezar por este. El factor k=1; Ok. ¿Qué sucedería? ¿Qué sucede con P? ¿Dónde debe de *vivir* P?
6. (**Em**): Ahhh, pues ese está sencillo porque P debe vivir sobre la mediatriz. La propiedad de la mediatriz es, es un conjunto de puntos que equidistan de los dos extremos. Si consideramos un punto P', la mediatriz parte a la recta $F_1$ $F_2$ por la mitad y es perpendicular. Entonces estas longitudes…, esta longitud (refiriéndose a $F_1$ P'), aunque yo mueva P' hacia arriba o hacia abajo, P' toma un valor digamos positivo o negativo, pero estas longitudes se mantienen iguales (refiriéndose a $F_1$ P' y P' $F_2$)
7. (**E**): Cuando la constante de proporcionalidad es 1, el lugar geométrico es…
8. (**Em**): Una línea recta.
9. (**E**): En particular la mediatriz.
10. (**Em**): La mediatriz
11. (**E**): Ahora pasamos al 2

*El participante reflexiona y analiza su construcción.*

12. (**Em**): si considero a P sobre la recta $F_1F_2$, entonces P lo divide en tres partes, entonces este sería ***l*** y este sería ***2l***… y si el punto P lo paso hacia abajo, tiene que ser necesariamente el simétrico de P con respecto a la recta ($F_1F_2$). Pareciera, por lo menos en este caso, que P nuevamente va a vivir en otra recta. Pero la recta esta… la recta ya no es la mediatriz. Pareciera ser que la recta está desviada o está a una distancia $F_2$ la mitad de la distancia a $F_1$. Para este caso particular. (Ilustración 135)

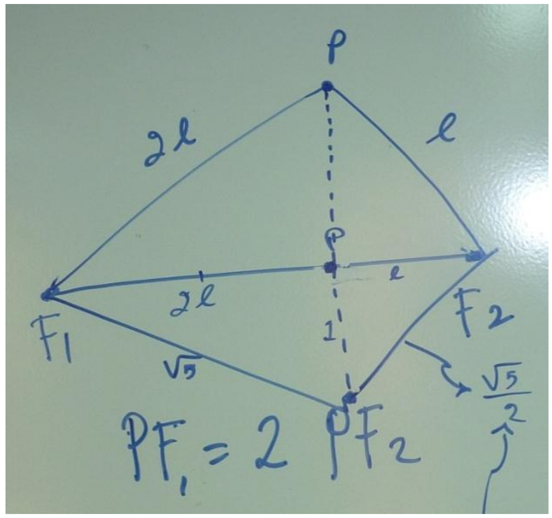



**Ilustración 135: El participante ha establecido tres posiciones específicas para P, cuando k=2 (los tres puntos los ha marcado con la letras P)**

**13.** (**E**): Entonces consideras que el lugar geométrico vuelve a ser una recta.

**14.** (**Em**): Parece ser una recta

**15.** (**E**): Parece ser una recta.

**16.** (**Em**): Parece ser una recta

**17.** (**E**): Y P debería pasar por… dentro del segmento $F_1F_2$

**18.** (**Em**): Sí.

**19.** (**E**): Porque de esta manera se garantizaría que $F_1P$ es el doble que $PF_2$

**20.** (**Em**): (asiente)

**Episodio 2: Primeras hipótesis**

**21.** (**E**): Continuemos con k=3

El participante dibuja el segmento $F_1F_2$ y lo parte en 4 segmentos iguales con 3 puntos sobre el segmento. Marca el más próximo a $F_2$

**22.** (**Em**): Aquí estaría P, ***l*** y 3***l***. Si trazamos, aunque no lo considero muy correcto, si trazamos una circunferencia, aquí mantendríamos, por lo menos mantendríamos… de este lado se mantendría ese factor. El problema es, si para todos estos puntos… esta distancia es l, que no creo. No creo porque aunque esta distancia (el segmento con magnitud 3*l*) se mantenga todo el tiempo constante, esta distancia (el segmento de magnitud *l*) va creciendo. Va aumentando cuando esta es fija, entonces, es imposible. Esto es imposible. (Ilustración 136)

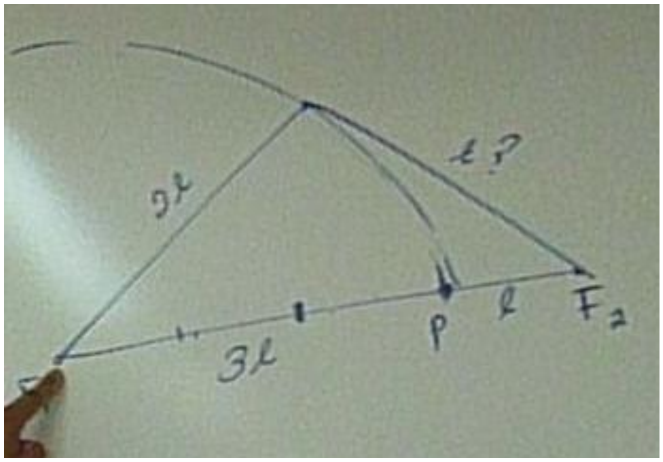



**Ilustración 136: El participante determina la imposibilidad de la satisfacción de las condiciones del problema en su construcción.**

*El participante borra su dibujo y emprende una construcción nueva. (Ilustración 137)*

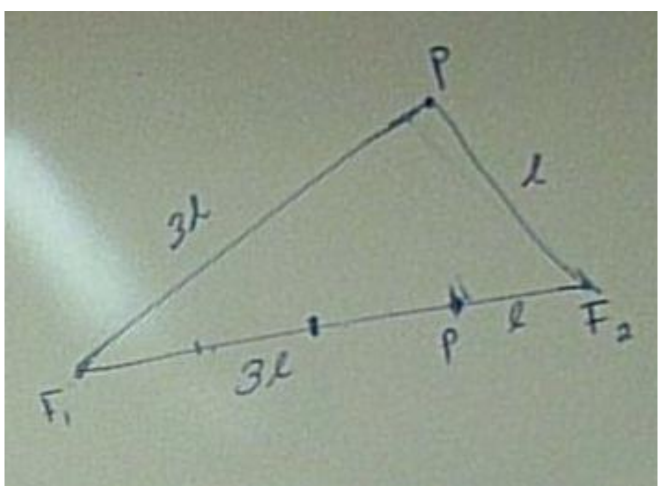



**Ilustración 137: El participante bosqueja una nueva construcción para k=3.**

23. (**Em**): Aproximadamente tendríamos nuevamente a P aquí, ***l*** y 3***l***… Pareciera ser nuevamente otra recta. Necesariamente lo voy a encontrar (a P) de este otro lado. (escribe P')

24. (**E**): La idea es que divides $F_1F_2$ en cuatro partes, y luego buscas a P sobre esa perpendicular…

25. (**Em**): Sobre esa perpendicular

**Episodio 3: Reinterpretación estática**

*El participante se ha convencido de que el conjunto de puntos siempre está sobre una recta perpendicular al segmento $F_1F_2$, cuyo pie de dicha perpendicular divide al segmento original en la razón dada por la constante k.*

26. (**E**): Voy a hacer un caso particular de tu construcción. Supongamos que de $F_1$ a $F_2$ mide… mmmm, 3, o 4 cm. Voy a tomar medidas concretas. Supongamos que son 4 cm. Entonces como esta es perpendicular, yo puedo construir un triángulo rectángulo *tramposamente* donde esto (P $F_2$) mida… bueno P ¿dónde está? ¿está aquí verdad? (señalando la perpendicular), tú doces que P vive sobre esta recta

27. (**Em**): (asiente)

28. (**E**): Voy a construir un triángulo rectángulo donde esto ($F_1$P) medirá 3 cm, sí, porque todo ($F_1F_2$) mide 4… y de aquí para acá (del pie de la perpendicular hacia abajo sobre la misma), voy a hacer que mida 4 cm, porque de esta manera garantizo un triángulo rectángulo donde este (su hipotenusa) mide… (Ilustración 138)

29. (**Em**): 5 cm

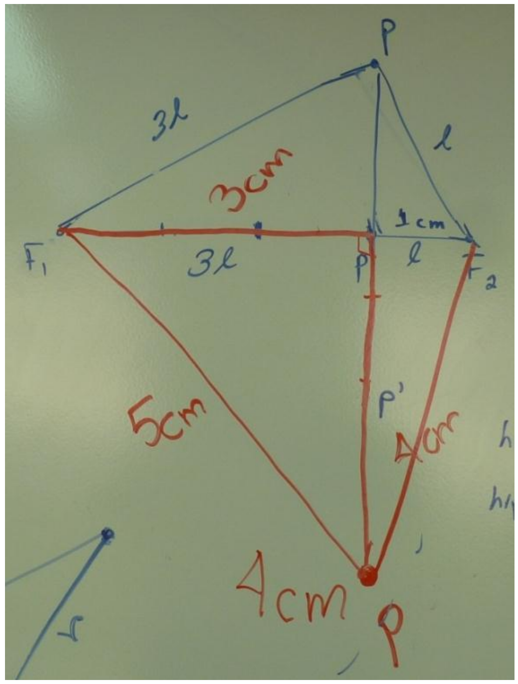



Ilustración 138: Contraejemplo propuesto por el entrevistador. P está sobre el lugar geométrico sugerido por el participante.

30. (**E**): Entonces, este punto… tú me estás diciendo que este punto, es un posible candidato a P
31. (**Em**): (asiente)
32. (**E**): Entonces se tendría que cumplir, de acuerdo a las condiciones, que este segmento ($PF_2$) de acuerdo a esta constante (2), tendría que medir 5/3, porque ($F_1P$) tendría que ser el triple… ¿verdad?
33. (**Em**): Así es. Y no. No se cumpliría
34. (**E**): ¿No se cumple? ¿Por qué?
35. (**Em**): Mmmmm…
36. (**E**): Aquí mide 1 (señalando el segmento de longitud ***l***
37. (**Em**): No se cumpliría porque…
38. (**E**): Calculemos el valor de este cateto ($PF_2$)
39. (**Em**): Este valdría 1 (señalando el segmento de longitud ***l***), y esta hipotenusa sería igual a la raíz de la suma de los otros dos… este es 4 (haciendo referencia al segmento que va del pie de la perpendicular a l punto P). Sería raíz de 17

40. (**E**): ¿Entonces?
41. (**Em**): Entonces no sería
42. (**E**): Este es un contra ejemplo. Probemos con k=2…
43. (**Em**): Aquí, lo mismo, podemos hacer un triángulo…
44. (**E**): Podremos hacer *trampa* *(en referencia a que podremos construir u triángulo rectángulo con catetos de longitud entera)*
45. (**Em**): Sería 4 (haciendo referencia al cateto en la perpendicular), 5 (haciendo referencia a la hipotenusa)… y esto va a ser obviamente…
46. (**E**): Pero allá ya pusiste 4 y esto 5, todo esto (el segmento de longitud 2 ***l***) tendría que medir 3
47. (**Em**): ¡Oh!, tienes razón, Tienes razón. Entonces…
48. (**E**): ¿Puede ser 2 y 1 ( En referencia a los catetos)
49. (**Em**): 2, 1, entonces este también debe medir, raíz de 5
50. (**E**): entonces necesitamos que esto ($PF_2$) sea la mitad (de $F_1P$). Esto tendría que medir $\frac{\sqrt{5}}{2}$
51. (**Em**): $\frac{\sqrt{5}}{2}$
52. (**E**): Vamos a ver. Si cumple pues… P era buen candidato ¿no?
53. (**Em**): Para este caso…
54. (**E**): Yo le agregaría todavía esto… (escribe el signo de interrogación en el número $\frac{\sqrt{5}}{2}$)
55. (**Em**): Ah, bueno.
56. (**E**): Es que este mide $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; pues no. No fue igual
57. (**Em**): Entonces P no puede estar en una recta ¿no?
58. (**E**): ¡No puede estar en una recta!

**Episodio 4: Refracción digital**

El docente ha determinado que el lugar geométrico que alude el problema es no es una recta, pero no visualiza con precisión, la naturaleza de este conjunto de puntos. Ahora se enfrenta el problema en  medio digital.

Se ha dotado al participante de una computadora con el software Cabri y simultáneamente se graba la co-acción participante con el ambiente digital, en tiempo real a través del software *Camtasia Studio*.

A continuación se hará una cronología de momentos nodales de esta actividad y en algunos casos breves comentarios sobre la importancia de ese momento.

El número que aparece antes del registro, indica el tiempo en que se ubica el comentario respecto al video que recoge la evidencia de la actividad.

***12:18***

Emanuel determina, que P es un punto arbitrario en el plano. (Ilustración 139)

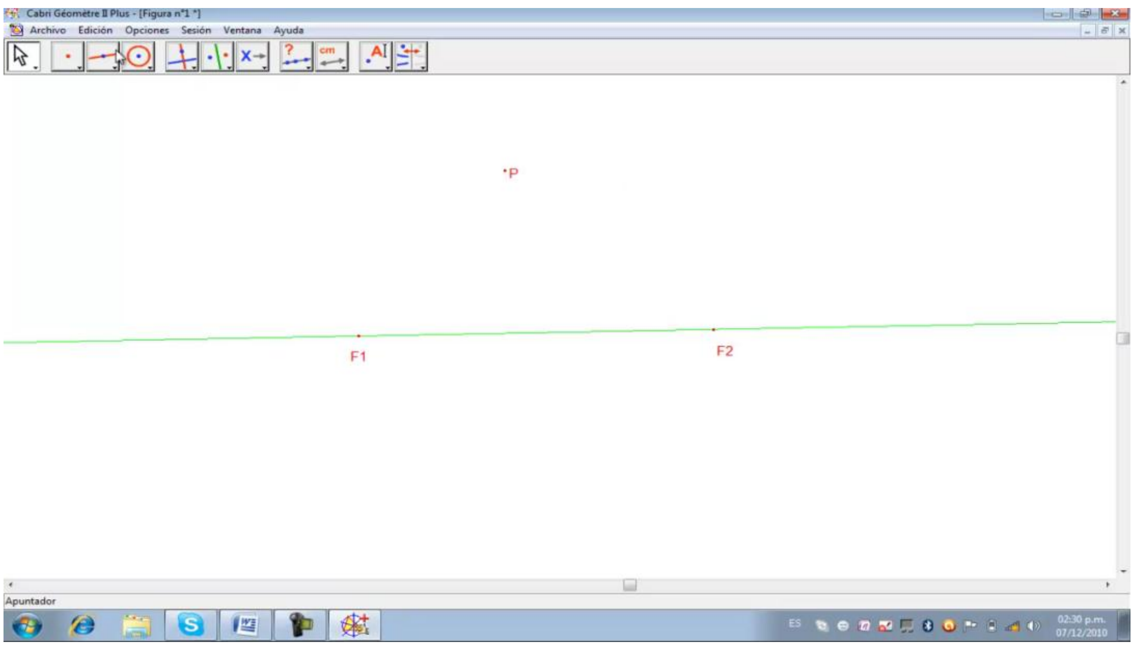



Ilustración 139: Modelación.

***17:08***

El participante solo encuentra la solución para el caso particular k=2. (Ilustración 140)

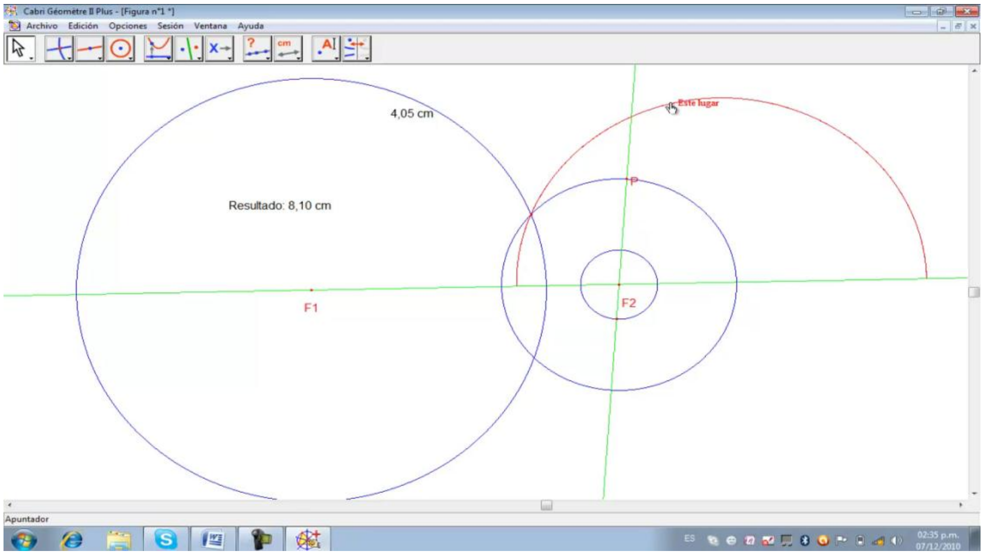



Ilustración 140: k=2

***21:17***

El participante decide modelar el caso general y establece el caso general de la relación de proporcionalidad solicitada. (Ilustración 141)

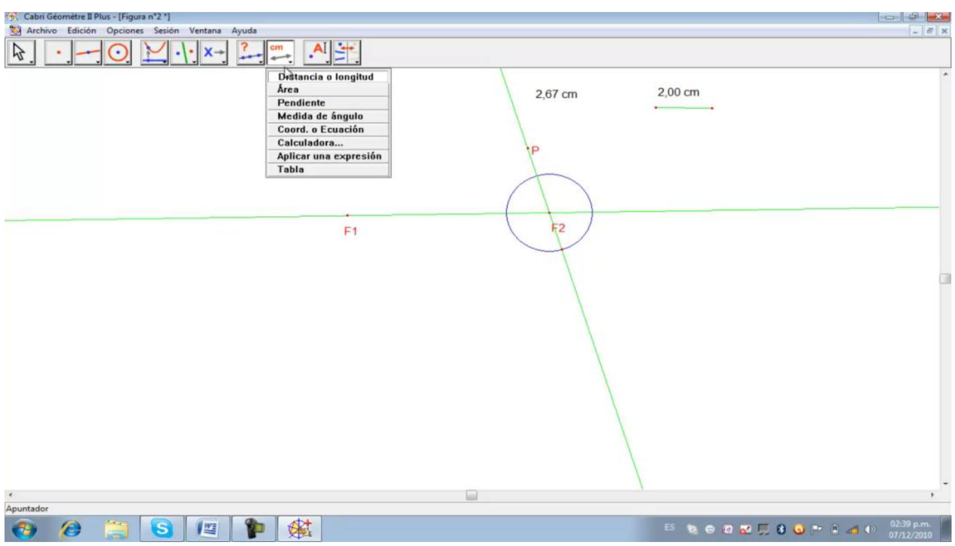



Ilustración 141: Caso general

***23:00***

El participante construye erróneamente el lugar geométrico.

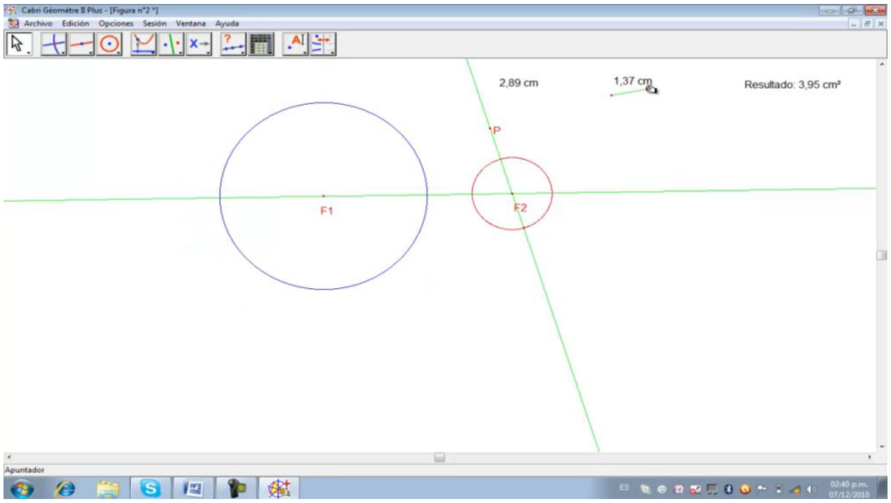



Ilustración 142: Inconsistencia

También desiste de este trazo, pero mantiene el ángulo principal.

***23:41***

El participante determina el lugar geométrico y reconoce a la mediatriz como el caso particular cuando k=1

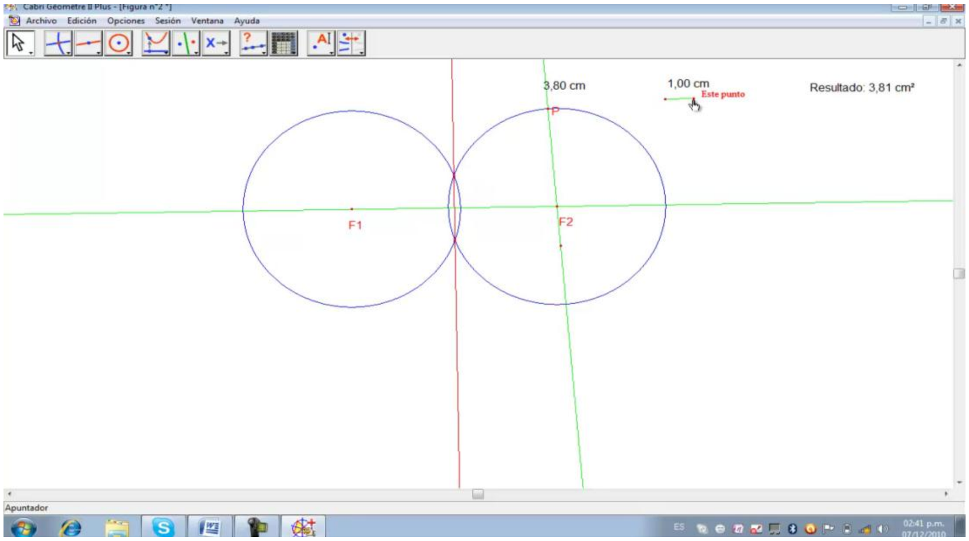



Ilustración 143: k=1, el locus es una recta

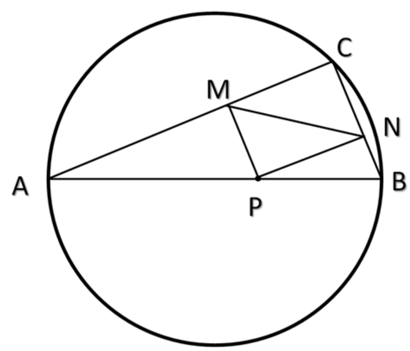
El estudiante-profesor, usando tecnología solo modela los casos cuando k=1 y k=2. La dificultad de la no generalización reside en la relación estructural que establece entre los elementos que conforman su construcción. El tiempo que llevó a este participante a esta respuesta parcial es de 23 minutos con 41 segundos.

## Estudios de caso con Lety

### Episodio 1: Planteamiento de las condiciones del conjunto de puntos

El problema (Ilustración 144) que se planteó al *Lety* fue:

Sea C un punto sobre la circunferencia de diámetro AB.
Sea P un punto sobre AB por donde se levantan perpendiculares a los lados y cuyas intersecciones se han marcado como M y N respectivamente.




Encuentre la posición de P para que el segmento MN tenga longitud mínima

Ilustración 144: Problema de mínimo

*Lety observa con atención el problema en su versión impresa. Reflexiona un poco y empieza a realizar una construcción geométrica en el pizarrón. (Ilustración 145)*

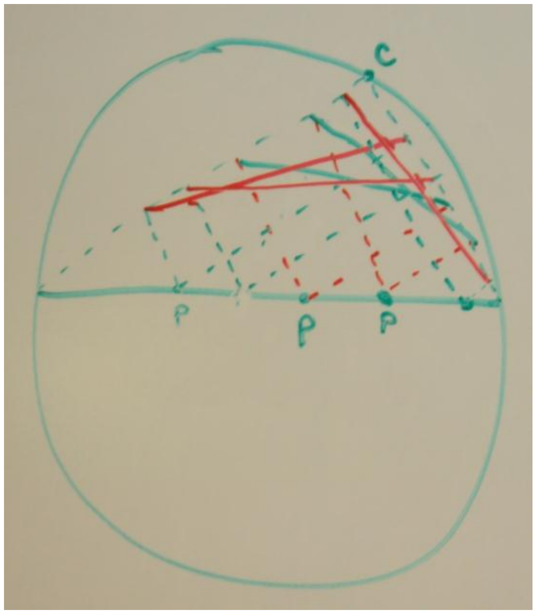



Ilustración 145: Trazo realizado inmediatamente de reflexionar sobre el problema.
Ha bosquejado el dibujo a partir de 4 posiciones distintas para P.

**Episodio 2: Primeras hipótesis**

1. **Entrevistador (E)**: Tienes tres casos para…
2. **Lety (L)**: Va creciendo
3. (**E**): ¿Va creciendo?
4. **(L)**: Por acá en su punto medio, debe de ocurrir…
5. (**E**): ¿Algo?
6. **(L)**: Algo, ¿no? Algo debería suceder. Yo digo, ¿no?
7. (**E**): ¿Por qué? ¿Por qué ahí?
8. **(L)**: ¿Por qué? Pues porque… si aquí es menos (refiriéndose al segmento MN cuando P está próximo a B), y luego ya aquí es (refiriéndose al mismo segmento pero cuando P está cerca de A)… digo, si aquí va creciendo y luego va decreciendo… debe haber un punto que haga esto ¿no?
9. *La participante dibuja con el movimiento del brazo lo que sugiere una parábola cóncava hacia arriba.*
10. **(L)**: ¿Dónde iba?... ¡Ah sí…! Ya.
11. **(L)**: Sí, ¿no?

***12.*** **(L)**: Haber…

**13.** **(L)**: ¿Es una recta no?

**14.** **(L)**: Sí, mira. Efectivamente. Si se acerca hacia acá crece (refiriéndose al caso en que P se aproxima a B). Si se acerca hacia acá, va decreciendo (Refiriéndose al caso en que P se acerca al centro del círculo). Llega al punto medio y (Moviendo su mano del centro hacia el vértice A) vuelve a crecer.

***15.*** **(L)**: ¿No?

**16.** (**E**): Entonces el problema…

***17.*** **(L)**: Entonces P tendría que estar en el punto medio (Refiriéndose al punto medio del diámetro)

**18.** (**E**): Esa es tu hipótesis

***19.*** **(L)**: Yo diría eso

**20.** (**E**): cuando P está en el punto medio, el segmento MN…

***21.*** **(L)**: Es el menor

**22.** (**E**): Es el menor…

***23.*** **(L)**: Yo diría que sí. Haber…

***24.*** **(L)**: Sí, ¿no? Yo digo.

**Episodio 3: Reinterpretación estática**

*No hubo una reinterpretación estática. La participante estaba convencida de que la solución involucraba el punto medio del diámetro.*

**Episodio 4: Refracción digital**

La participante modela el problema a partir de las condiciones iniciales.

***03:32***

**25.** **(L)**: Una recta… ¡Ah, sí!, una circunferencia, una recta… un punto sobre la circunferencia, que se va a llamar C.

***04:05***

26. **(L)**: Fíjate…acá está, para que así se mueva. Haber… ¡sí! Luego, que era un punto, pero… ¿dónde se pone?... un punto sobre objeto… éste. Luego, paralela.

***04:35***

27. **(L)**: ¡No es la respuesta!
28. (**E**): Veme explicando…
29. **(L)**: ¡No es la respuesta!
30. (**E**): ¿Cuál?
31. **(L)**: ¿Eh?  ¡No va a ser la respuesta!
32. (**E**): ¿Por qué?
33. **(L)**: ¿por qué? Pues por eso quiero saber por qué…
34. (**E**): Ahorita, ¿por qué crees que no es la respuesta?
35. **(L)**: ¿Por qué ahorita creo que no es la respuesta?... Porque ahí se ve chiquito… ¡mira! (mientras desplaza a P hacia el centro del círculo) y aquí crece (va acercando a P hacia el pie de la perpendicular al diámetro desde C aunque no lo nota) (Ilustración 146)

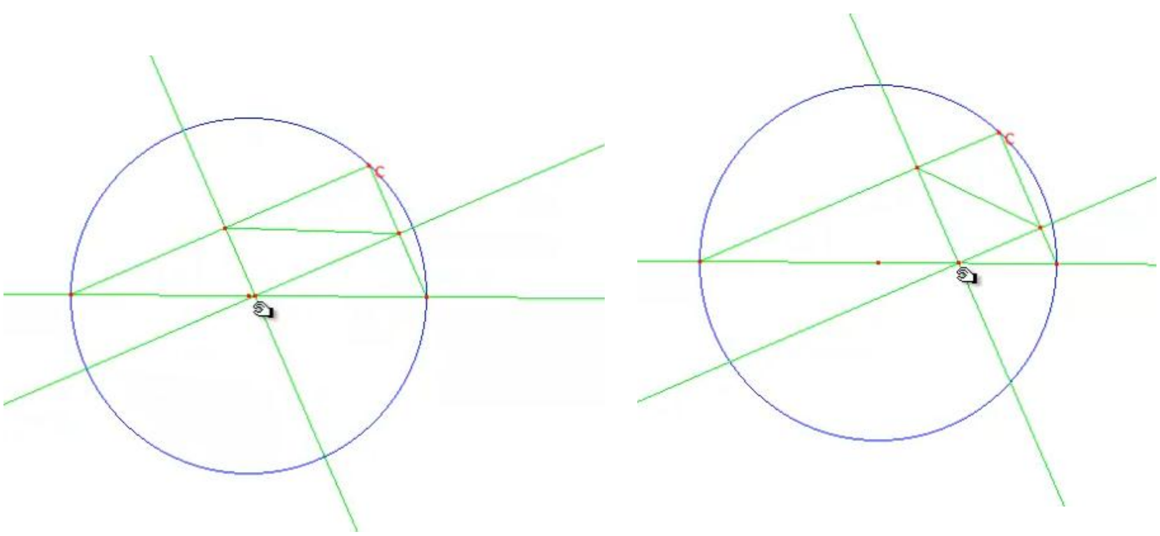



**Ilustración 146: Modelo dinámico que confronta la hipótesis inicial de la participante. En estos fotogramas tomadas directamente de la pantalla de trabajo, se aprecia que cuando P está cerca del punto medio, al menos en este caso, no garantiza que el segmento MN tenga longitud mínima.**

36. (**E**): Se ve más chiquita (la longitud del segmento MN) que en el punto medio.
37. **(L)**: ¿A una tercera parte?
38. (**E**): Te precipitaste…
39. **(L)**: ¡Sí!

***05:31***

40. (**E**): Entonces, conclusión momentánea, es que no es en el punto medio.
41. **(L)**: ¡No!
42. **(L)**: A una tercera parte. Haber, vamos a ver…

***05:49***

*La participante empieza a construir ejes coordenados para graficar la relación entre posición del punto P y longitud del segmento MN.*

43. **(L)**: distancia, ¿dónde está el segmento?... distancia… distancia de este segmento… distancia de este punto a este punto… compás… este, en este y este en este… Ahh! No puse esta intersección, ¿verdad?

***07:20***

*La participante se dispone a visualizar el lugar geométrico: (Ilustración 147)*

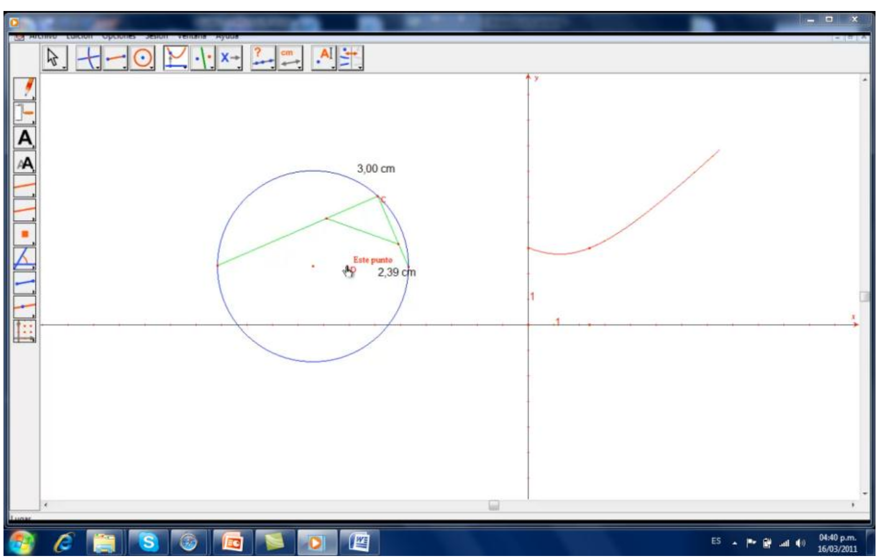



Ilustración 147: locus

44. (**E**): ¿Qué estás graficando?
45. **(L)**: ¿Mande? (La participante está absorte en la manipulación de su construcción dinámica)
46. (**E**): ¿Qué estás graficando?
47. **(L)**: Estoy graficando la distancia
48. (**E**): En el eje de las X, ¿qué pusiste?
49. **(L)**: ¿En el eje de las X? Esta distancia…
50. (**E**): La distancia… ¿de dónde a dónde?
51. **(L)**: De P a… B
52. (**E**): De P a B
53. **(L)**: (A sí misma) ¿Quién es B? Éste. Éste es A. De P… nada más para tener una referencia, ¿no? Y en el eje de las “yes”, *grafiqué* la… distancia del segmento (Refiriéndose a la longitud del segmento MN).

***08:32***

La participante aumenta la precisión de los valores que ofrece el software.

54. **(L)**: Ajá… Hay, no lo puedo agarrar. Ahí está

***09:06***

55. **(L)**: ¡Mira! P muy cercano a B. al ángulo ¿no? Recto
56. *En este momento, la participante intuye que la solución involucra el vértice C*
57. (**E**): Este… ¿es una tercera parte?
58. **(L)**: ¿Mande?
59. (**E**): ¿Es una tercera parte, como habías dicho anteriormente?
60. **(L)**: Quien sabe…

***09:28***

La participante ha colocado intencionalmente el vértice C sobre el punto medio del diámetro.

61. **(L)**: ¡Ah!, mira aquí si se cumple que es a la mitad

62. (**E**): Aproximadamente…

63. **(L)**: ¡Claro que sí! (Refiriéndose a que no era aproximación sino una posición precisa)

64. (**E**): Pero, ¿por qué?

65. **(L)**: No sé… espérame… déjame pensar… ¡Ya sé! Es cuando aquí se forma un *ángulo isósceles*… (*Obviamente, la participante se refería a que la solución posiblemente se daba cuando el triángulo MCN es isósceles*)

66. (**E**): Un ángulo… ¿qué?

67. **(L)**: Un ángulo isósceles, aquí…

68. (**E**): ¿*Ángulo isósceles*?

69. **(L)**: ¡*Un ángulo isósceles*! Digo, un triángulo isósceles. Ahora voy a preguntar (A cabri), ¿¿Cuál es la medida de aquí a aquí? (Pide la longitud de M a C), ¿y la medida de aquí a aquí? (Pide la medida de N a C), A ver, vamos a ver…

70. **(L)**: ¿Dónde dijimos que era el mínimo? Por aquí…

***10:32***

La participante intenta verificar numéricamente su hipótesis del triángulo isósceles. Pero no lo consigue

71. (**E**): Mmmm. ¡No!

72. **(L)**: No, pues no. Quien sabe…

73. **(L)**: ¡Pero aquí si se cumple lo que dije! (Colocando nuevamente C sobre el punto medio del diámetro y acercando a P al centro)

74. (**E**): en ese punto… ¿y dónde está C?

75. **(L)**: ¿C? sobre la mediatriz del *ángulo* AB. (Risas) ¿no?

76. (**E**): La mediatriz del… ¿*ángulo AB*?

77. **(L)**: Digo, del lado AB.

78. (**E**): Del lado AB. Del segmento AB. ¿Por qué no trazamos el segmento AB? A lo mejor da alguna pista…

79. **(L)**: ¿Qué?

80. (**E**): Ahora desplaza a P
81. **(L)**: A P…
82. (**E**): De acuerdo al lugar geométrico que tienes…
83. **(L)**: ¿Qué? No, ¡ahí es más grande!
84. (**E**): Es más grande ¿no?,  Deja a P fijo. Haber, vamos a hacer un experimento.
85. **(L)**: Dejo a P fijo. Fijo ¿en medio?, o fijo a un lado…
86. (**E**): Arbitrario. Ahora, observa el lugar geométrico y mueve C. Fíjate qué pasa con tu lugar geométrico. Se supone que el punto resaltado es (el valor del segmento asociado a la posición de) P. ¿No? Es el valor… entonces, haber, busca la posición de C para que el punto quede en el mínimo
87. **(L)**: Busco… ¿para qué? Ah para que dé el mínimo
88. (**E**): Más o menos ahí… ¿verdad? Haber, ¿qué pasa con esa C en particular?
89. **(L)**: Ahí ¿no?... 5, 5, ya me pasé… 5, 4,… 4, 5, 3,… ¿Para que P sea el mínimo me dijiste?  No. Para que la distancia sea el mínimo. ¿No?
90. **(L)**: 3,3,.. 2,2…
91. (**E**): Garantizando la posición de P en ese punto.
92. **(L)**: ¡Ah!
93. (**E**): O sea, ahora estás usando el lugar geométrico
94. **(L)**: Como ahí, ¿no? (Refiriéndose a la posición de C)
95. (**E**): Como ahí… ¿qué posición es esa en particular para C?

***13:03***

En este momento la participante se dispone a trazar una perpendicular al diámetro por P.

96. **(L)**: Pues viene en una recta… haber…  (Perpendicular) de P por este...
97. **(L)**: ¡Sí, mira!
98. (**E**): Ahhh…
99. **(L)**: ¡Es cuando está en la recta!

**100.** (**E**): ¿Cuál recta?

**101.** **(L)**: Es decir, si yo pongo a P aquí (La participante desplaza a P lejos de la posición donde realizó el descubrimiento) C tiene que estar en el punto (el pie de la perpendicular) aquí.

**102.** (**E**): ¿Y se garantiza que es el…? Haber, pon un C arbitrario ahora…

**103.** **(L)**: Aquí. Si… ¿Ahora pongo un C cualquiera?

**104.** (**E**): Donde sea… ¡Ahí! Haber, cómo le haces para recorrer ese punto

**105.** **(L)**: Mmmm…

**106.** (**E**): ¡Pero C no!... Ah, ¡ya!

**107.** **(L)**: No, ¡voy a trazar la perpendicular!

**108.** (**E**): Ah, ¡ya!

**109.** **(L)**: Y P tendría que estar aquí… ¡Ahhh! ¿qué pasó?... se fue por un instante (el monitor cambió de ventana y ocultó momentáneamente la construcción)

**110.** **(L)**: ¡Sí! Mira qué interesante. Ya aprendí algo nuevo hoy.

**111.** (**E**): Haber, ¿qué conclusión?

**112.** **(L)**: Que tiene que estar en la línea…

**113.** (**E**): ¿Pero qué línea? No cualquier línea

**114.** **(L)**: Perpendicular que pase por P. en la intersección de esa línea con el círculo, ahí tiene que estar C. O al revés.

**115.** (**E**): Ahora lee el problema.

**116.** **(L)**: Ahora leo el problema… “Sea C un punto…”

**117.** (**E**): El C ya está dado.

**118.** **(L)**: Haber… ajá. El C ya está dado.

**119.** (**E**): P un punto sobre AB

**120.** **(L)**: Ajá…

**121.** (**E**): Y sobre P se levanta la perpendicular a los lados.

**122.** **(L)**: Ajá.

**123.** (**E**): Y las intersecciones se llaman M y N.

**124.** **(L)**: Ajá.

**125.** (**E**): Encuentra la posición de P para que el segmento MN tenga la longitud mínima. ¿Dónde debe estar P?

***14:37***

La participante enuncia correctamente la solución del problema.

**126.** **(L)**: Pues en la perpendicular que... En el pie de la perpendicular donde baja C… No. ¡En el pie de la perpendicular de… del… que va de C al segmento AB! Ahí. (Ilustración 148)

**127.** (**E**): Ahí debe estar P. Ok ¡Listo!

**128.** **(L)**: Fíjate que interesante…

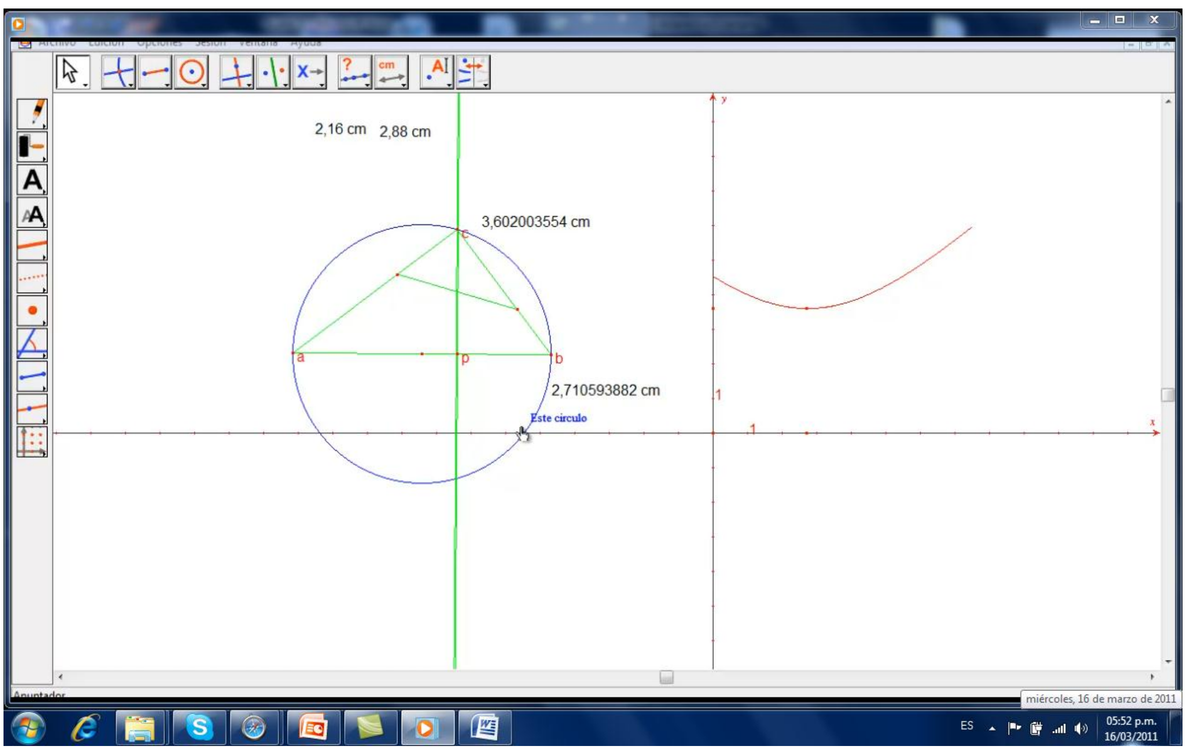



Ilustración 148: locus como herramienta de mediación

**Episodio 1: Planteamiento de las condiciones del conjunto de puntos**

El problema (Ilustración 149) que se planteó al *Ingrid* (**I**) fue:

Un palo (el segmento QP) de longitud $2r$ se mueve de tal modo que su extremo inferior se apoya sobre el fondo de un hoyo semicircular de radio $r$ y, además, tiene tangencia con un borde del hoyo. Demostrar que el extremo P del palo se mueve por una cardioide.

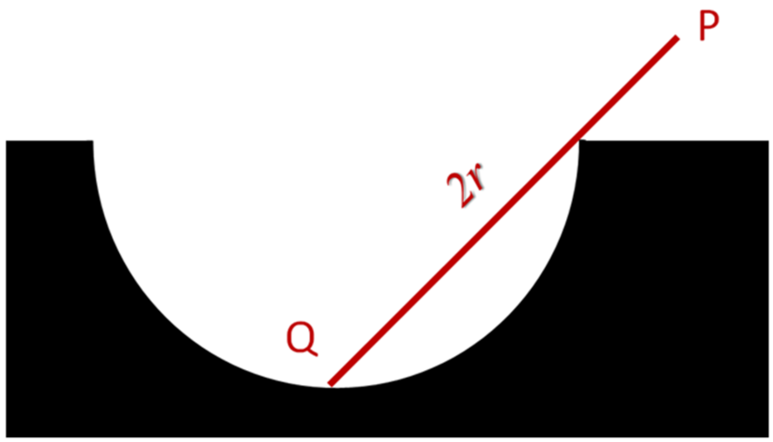



Ilustración 149: Problema

*El participante observa con atención el problema, reflexiona en torno a las condiciones. Muestra impaciencia por resolverlo aunque admite que no tendrá avances solo con papel y lápiz:*

1. **Ingrid (I)**: …No voy a hacer grandes avances de… analíticamente no.
2. **Entrevistador (E)**: ¿Pero se entiende el problema?
3. **(I)**: Esa parte no. O sea, yo entiendo que necesito seguir la trayectoria de este punto (el punto P) cuando Q hace esto (El participante mueve el lápiz siguiendo el contorno circular).
4. **(E)**: Dibuja otra posición diferente, que cumpla con las condiciones.
5. **(I)**: Es que esto es lo que no entiendo (agitando el lápiz), que tiene tangencia con un borde del hoyo
6. (**E**): Entonces…

7. **(I)**: Estás diciendo que esto… ¿tiene tangencia con un borde del hoyo?
8. (**E**): ¿Cuáles son los bordes? Solo hay dos ¿no?
9. **(I)**: Este y este (marcando en la hoja los bordes referidos como se resaltan en la ilustración 150)

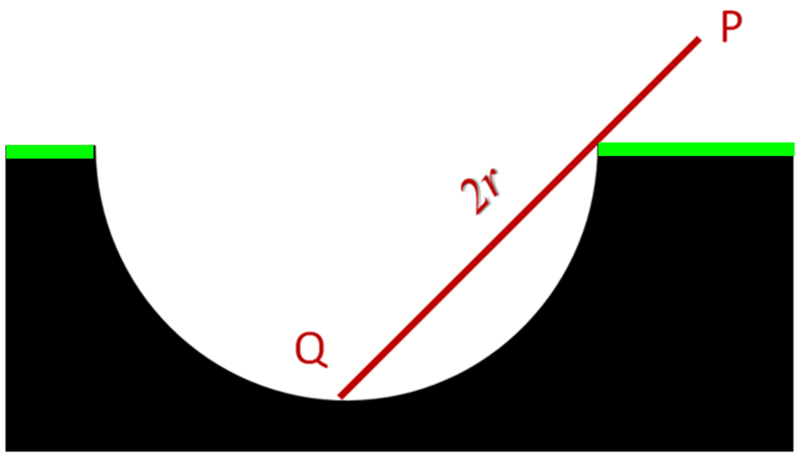



**Ilustración 150: El participante considera como bordes los segmentos resaltados en verde, lo que le dificulta asimilara la condición de tangencia con el palo QP**

10. **(I)**: ¡Ahh! ¡Ya!
11. (**E**): Más que eso…
12. **(I)**: Te interesa este punto de tangencia (remarcando el borde de la semicircunferencia)
13. (**E**): Ese punto
14. **(I)**: Ah, ¡ok!
15. (**E**): ¿qué significa eso? Que no puedes despegar el palo de…
16. **(I)**: No, no puede
17. (**E**): Y es tangente ¿no?
18. **(I)**: Pero finalmente no solo es solamente la semicircunferencia, sino también la superficie…
19. (**E**): ¿El punto P puede ingresar en el hoyo?
20. **(I)**: ¿Se puede? ¿Podría?
21. (**E**): Podría… haber…

22. **(I)**: Es que necesito saber esto (Haciendo referencia a la longitud de la semicircunferencia)… esto mide $2r$ (haciendo referencia a La longitud del segmento PQ)…
23. **(I)**: No. Me gustaría hacerlo mejor… (Sugiriendo que prefiere resolver el problema con geometría dinámica)
24. (**E**): ¿Sí?
25. **(I)**: Sí.

**Episodio 2: Primeras hipótesis**

26. **(I)**: No. Es que necesito acordarme bien de las… cardioide. Cómo se definen y todo eso. Porque analíticamente nunca lo hicimos. Solo vimos una construcción que nos daban y yo hice más… varias. Pero…
27. (**E**): ¿Un bosquejo de P?, ¿de la trayectoria de P?
28. **(I)**: Un bosquejo…
29. (**E**): A través de… diferentes posiciones que pudiera adoptar el segmento QP…
30. (**E**): Por ejemplo, el caso límite, ¿cuál sería?
31. **(I)**: ¿El caso límite? El caso límite pienso que es… (Dibuja el segmento QP perpendicular a la base de la hoja con el extremo Q en el borde. Ilustración 151)

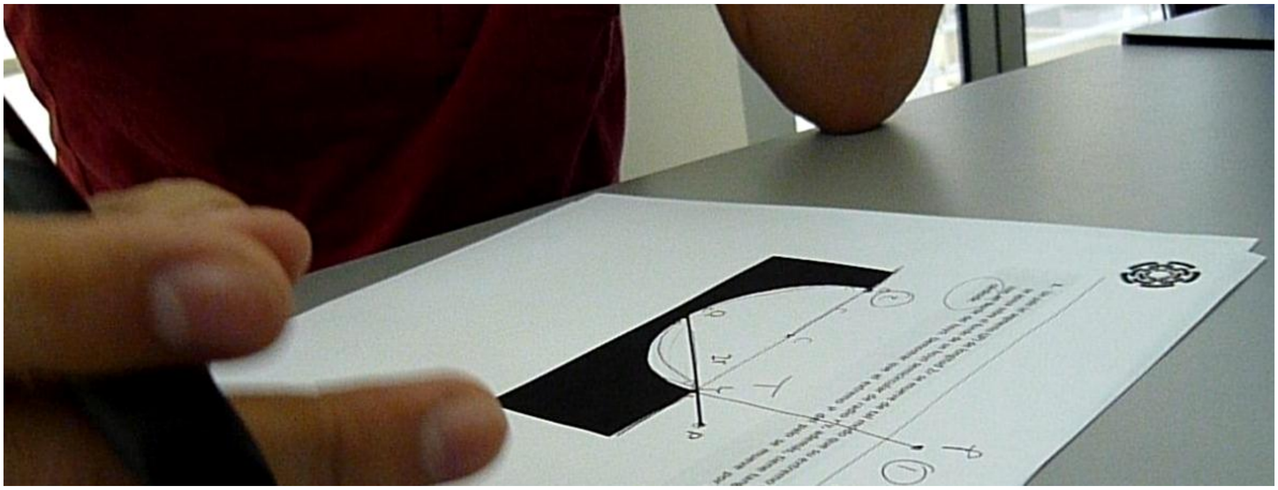


Ilustración 151: Interpretación del caso límite

32. (**E**): Ahí está P (enfatizando la posición de P en el caso límite)
33. **(I)**: Con P ahí.
34. (**E**): ¿Y el otro caso límite?… hay otro, ¿no?
35. **(I)**: Si… supongo que el otro caso… es cuando Q está aquí (señalando el borde izquierdo). Por eso nunca se sale. Es que están puestas (la separación entre los bordes) de tal manera que nunca va a ocurrir… entonces este es un caso límite y este es otro.
36. (**E**): Ahora, entre esos dos casos, ¿cuál será la trayectoria que describe P?
37. **(I)**: No sé… (Utiliza su lapicero para simular el desplazamiento del segmento QP)
38. **(I)**: No. Es que no me lo imagino.
39. **(I)**: Tiene que estar definida entre este y este (refiriéndose a las dos posiciones límite de P). Algo voy a tener que dibujar aquí. (Bosqueja con la trayectoria de su mano como círculos arbitrarios sobre su hoja de papel)
40. (**E**): Ahora, hay un dato que te dan, ¿no? Se sabe que (P) vive en un cardiode.
41. **(I)**: Mejor lo hago en… (sugiriendo usar geometría dinámica) Sí. No voy a hacer grandes avances… (el participante deja el lapicero sobre la mesa y entrecruza los dedos…)

**Episodio 3: Reinterpretación estática**

El participante rehusó a replantearse el problema de manera estática. Mostraba inquietud por modelar dinámicamente el problema.

**Episodio 4: Refracción digital**

El participante inicia la construcción de un modelo dinámico. Reflexiona mientras va replanteando el problema.

***O6:11***

42. (**E**): ¿Me vas platicando y lo discutimos?
43. **(I)**: Si ¿no? Nomás déjame pensar y si quieres después te explico, ¿no?

***07:03***

44. **(I)**: Mmm… no me está dibujando un punto de intersección. ¿Ya viste?... este con este y… no. ¿Ya viste?
45. (**E**): Selecciona por elementos
46. **(I)**: Este (circunferencia) con este (recta)
47. (**E**): Otra vez pero al revés.
48. **(I)**: Este con este…
49. (**E**): No lo reconoce, ¿verdad?
50. **(I)**: No. A ver, voy a intentar otra cosa.
51. **(I)**: Lo primero que hice fue tener un segmento que sea… dinámico. Que crezca…
52. (**E**): Y eso, ¿para qué te va a servir?
53. **(I)**: A partir de eso voy a construir… que ése va a ser mi radio
54. (**E**): Ah, el radio.
55. **(I)**: Entonces, es más fácil si ya tengo algo definido. Para que sea dinámico. Si no, no me va a funcionar como…

***08:53***

56. **(I)**: Como no podía yo intersectarlo… como no podía yo intersectarlo,
57. (**E**): Ajá…
58. **(I)**: Lo que yo hubiera dibujado primero era el círculo. A partir del círculo, con centro… bueno dibujé una recta que pasaba por su centro y por algún punto de su circunferencia. Y no podía intersectarlo. Entonces lo primero que dibujé fue la recta y ya después sobre la recta el hoyo que va a ser. ¿Ya?
59. **(I)**: Entonces ahora sí se mueve como yo quiero. ¿Ya?
60. (**E**): Ok

61. **(I)**: Entonces ya tengo… aquí está el hoyo. Ya nada más tengo que crear un segmento que cumpla con esas características. Estas que vienen ahí (en la

hoja impresa). Este va a ser mi centro… y voy a dibujar un punto Q… Mmmm… y ahora necesito dibujar, ¿Sabes qué me serviría? Una semirrecta que pase por Q y por ese lado… No. Lo que hice… no… semirrecta… Entonces lo que necesito…

62. **(E):** Y la longitud del palo es el doble del radio…

63. **(I)**: No yo sé. Solo necesito…

***12:07***

64. **(I)**: Woowww!

*El estudiante ha logrado obtener el lugar geométrico del punto P (Ilustración 152)*

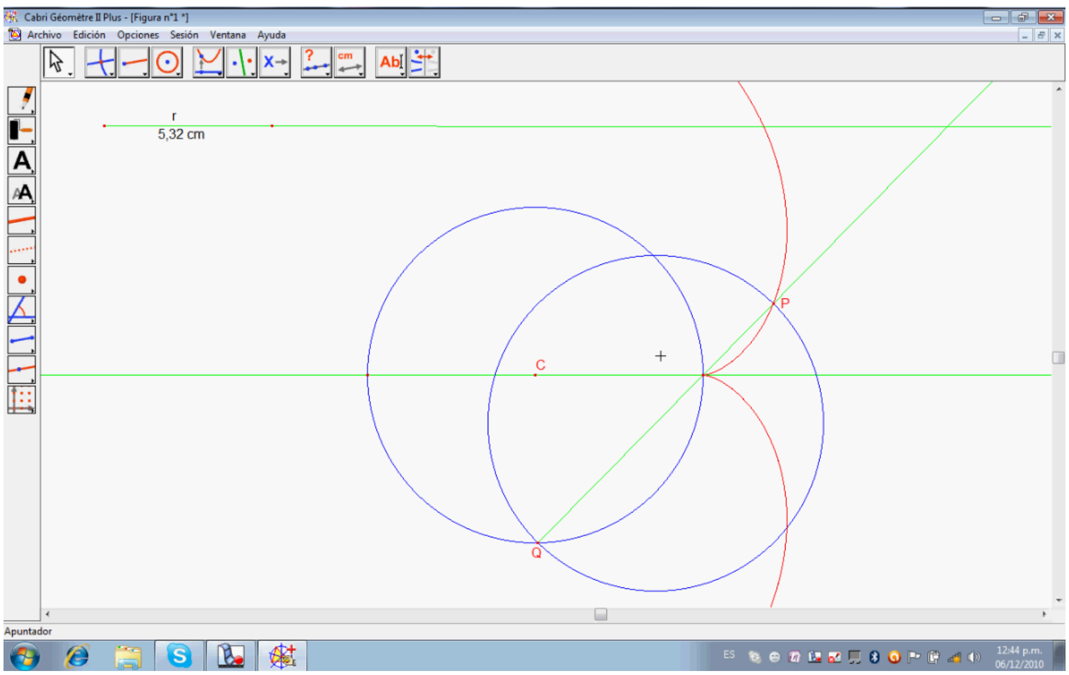



Ilustración 152: Fotograma del momento en que el participante obtiene el locus

*Episodio 1: Planteamiento de las condiciones del conjunto de puntos*

El problema (Ilustración 153) que se planteó al *Yolanda* fue:

> Por el interior de una circunferencia inmóvil $C_1$ de radio $2r$, rueda tocándola sin deslizar otra circunferencia $C_2$ de radio $r$.
>
> ¿Qué línea describe el punto **P** de la circunferencia rodante?

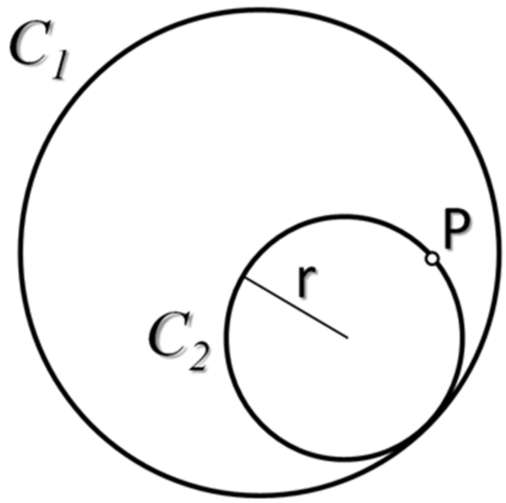



Ilustración 153: Planteamiento

La participante bosqueja una construcción que le permita analizar el problema. Traza inicialmente una línea ligeramente curva de la trayectoria de P (Ilustración 154).

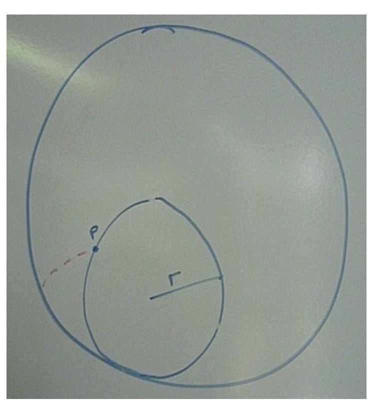


Ilustración 154: Inicio del recorrido de P.

El entrevistador, plantea la siguiente pregunta:

4. **Entrevistador (E)**: ¿Qué pasa cuando (el círculo interno) gira hacia la derecha?
5. **Yolanda (Y)**: Pues se va complementando la curva así (describe con la mano una curva que sugiere un cuarto de circunferencia), pero…

La participante ha comprendido el problema rápidamente. Empieza a mostrar evidencia de la trayectoria que le lleve a encontrar el lugar geométrico que se ha solicitado. Ha trazado una trayectoria curva del punto P (Ilustración 155).

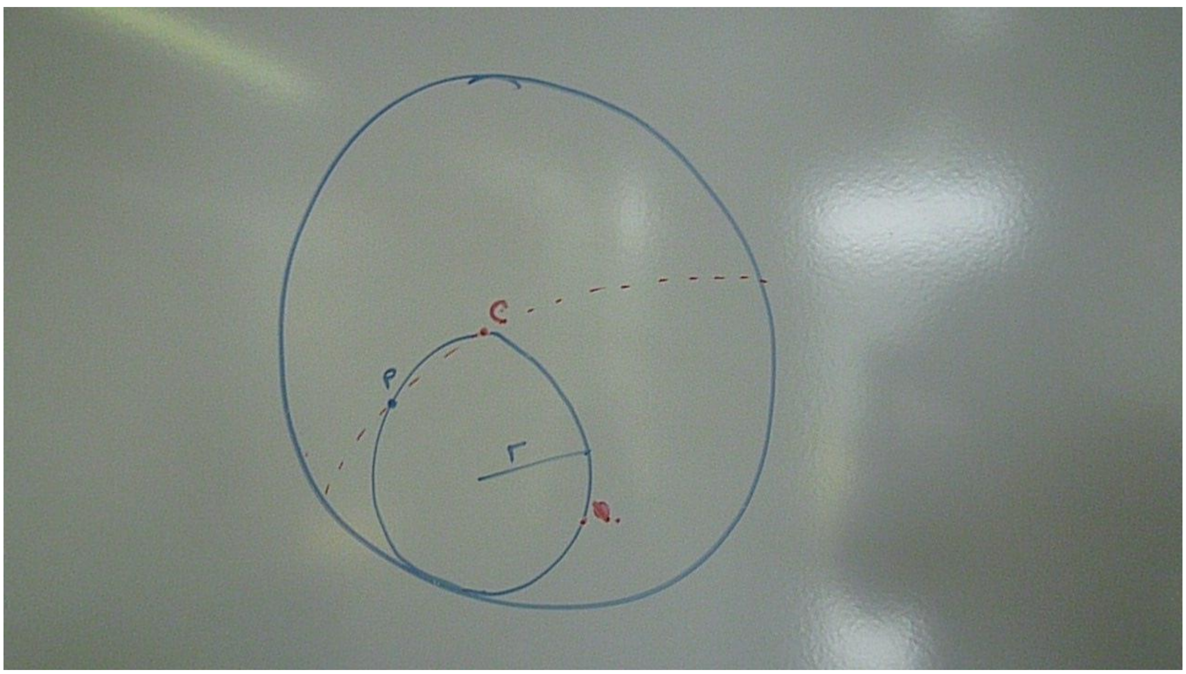



Ilustración 155: Primer hipótesis sobre la trayectoria de P.

**Episodio 2: Primeras hipótesis**

El lugar geométrico no es correcto pero es una buena aproximación, dado que no dista mucho de la trayectoria real. En este momento el entrevistador solicita que argumente este primer acercamiento.

6. **(E)**: ¿Me lo puedes explicar?, Por favor.
9. **(Y)**: Ahh. No. Sólo la pinté así. Porque yo digo que tiene que pasar por C
10. **(E)**: Entonces una característica esencial es que… tiene que pasar por C
13. **(Y)**: P pasa por C

La participante visualiza que la trayectoria incluye el centro de la circunferencia contenedora.

**14.** **(E)**: Ok. ¿Qué más?

**15.** **(Y)**: En algún momento…(se queda pensando)

**16.** **(E)**: En algún momento…(invitándola a que continúe)

**17.** **(Y)**: Ajá.

**18.** **(E)**: Bien. Y… ¿describe una curva?

**19.** **(Y)**: Sí.

**20.** **(E)**: Mmmm. ¿Por qué?

**21.** **(Y)**: ¿Por qué describe una curva?

**22.** **(E)**: ¿Por qué describe una curva? ¿Por qué no *hacia* arriba? (Tratando de llamar la atención de la concavidad de la trayectoria)

**23.** **(Y)**: ¿Cómo *hacia arriba*?

**24.** **(E)**: Si. Tú dibujaste (como trayectoria) un arco de... Bueno, supongo que es un arco porque estás pensando en… ¿?

**25.** **(Y)**: Ajá. (La trayectoria de su brazo parece indicar que está pensando en una circunferencia)

**26.** **(E)**: … ¿elipse? ¿parábola?

**27.** **(Y)**: No. No sé. En una… en un arco

**28.** **(E)**: ¿En un arco de circunferencia?

**29.** **(Y)**: Ajá. Pero debe de existir alguna relación entre el perímetro, ¿no?

La participante analiza su construcción y determina que hay una relación entre los radios. Sin embargo, piensa en la fórmula de la longitud de la circunferencia aunque escribe la del área. Ante esta eventualidad, el entrevistador pregunta:

**34.** **(E)**: ¿Esa fórmula de que es?

**35.** **(Y)**: ¿ $\pi r^2$?

**36.** **(E)**: $\pi r^2$ ¿qué es?

**37.** **(Y)**: El perímetro, ¿no?

**38.** **(E)**: ¿Por qué?

39. **(Y)**: ¿No? Ya. ¿No era el perímetro?... no me acuerdo. Ya me hiciste dudar si es el perímetro o no.

40. **(E)**: El perímetro *está* en unidades lineales.
41. **(Y)**: Ah, sí. No, no puede ser el perímetro.
42. **(E)**: ¿*Eso* qué es entonces?
43. **(Y)**: *Eso* es el área
44. **(E)**: El área
45. **(Y)**: ¡Ay!
46. **(E)**: Que también deben de tener alguna relación ¿no?
47. **(Y)**: ¡Ouch!
48. **(E)**: Si necesitaras el perímetro, ¿cómo lo calculas?
49. **(Y)**: ¿$\pi$ por radio? ¿ $\pi$ por diámetro? (hace un gesto afirmativo)
50. **(E)**: $\pi$ por diámetro…

La participante da evidencia de que conoce las fórmulas para obtener el área y la longitud de una circunferencia, sin embargo ha requerido de la interacción con el entrevistador para llegar a ella.

Este evento le ha permitido llegar a un resultado inesperado que le permitirá obtener una brillante aproximación al lugar geométrico requerido.

Con esta referencia al perímetro, y la relación entre los radios, la participante ahora empieza a analizar su trazo y señala posiciones particulares de P sobre ambas circunferencias. (Ilustración 156)

63. **(Y)**: $P_1$ es este ¿no?, el chiquito, y este es… (escribe $P_1$en la circunferencia mayor) Sí, $2r$… A ver, *dos pi r*, y $P_2$ es… $2r$ y $2r$ son $4r$… $4\,\pi r$… ¡Ajá!, ¡Cabe dos veces!

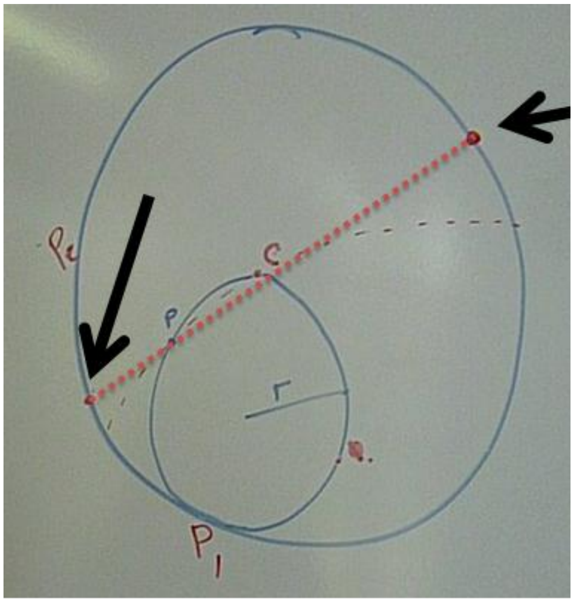



Ilustración 156: Presencia del locus.

**64.** **(E)**: Cabe 2 veces… (Invitándola a que continúe)

**65.** **(Y)**: Entonces, si cabe 2 veces **haría una línea**…

**66.** **(E)**: ¿Cómo línea? ¿por qué?

**67.** **(Y)**: ¿Por qué haría una línea? Porque tendríamos, que en algún momento P pase por aquí (señalando el centro de la circunferencia mayor), y la otra vez que pasa, pasa por aquí (señalando el extremo derecho, en rojo, del diámetro correspondiente).

La participante dibuja dos puntos diametralmente opuestos sobre la circunferencia. En la ilustración 26 se han resaltado los puntos indicados por dos flechas y la trayectoria que empieza a visualizar.

**Episodio 3: Reinterpretación estática**

En un intento porque la participante argumentara sus hipótesis, el entrevistador finge no haber comprendido.

**68.** **(E)**: A ver, eso está interesante pero, no te entendí.

**69.** **(Y)**: Sí. Mira: este círculo: más bien, este perímetro (la circunferencia rodante), cabe dos veces en este perímetro (la circunferencia contenedora)

70. **(E)**: Por lo que demostraste acá abajo. (En referencia con la proporcionalidad de los radios)

71. **(Y)**: Por eso. Bueno, por esto, es $P_2$… dos veces $P_2$… ok, no. Dos veces $P_1$es igual a $P_2$. Ajá. ¿No? Y entonces, como este punto (P sobre la circunferencia rodante) es fijo… supongamos que partimos de aquí, ¿no? (La participante remarca el punto donde P es tangente a la circunferencia contenedora) Trazamos la circunferencia aquí así ¿no? (La participante dibuja el caso en que la circunferencia inicia su recorrido), con P aquí, ¿no?

72. **(E)**: Ajá.

73. **(Y)**: Entonces, si la giramos, entonces P va a ir así avanzando, ¿no? (Con su mano traza la trayectoria de P). Más bien, así, avanzando en línea (La participante traza la trayectoria **recta** de P y continúa)... porque el otro punto donde P va a tocar ( señala a la circunferencia contenedora), va a volver a ser pero hasta el lado, hasta el otro lado, ¿no?, hasta la mitad…(refiriéndose a la circunferencia contenedora)

74. **(E)**: Ajá…

75. **(Y)**: … de la circunferencia. Entonces eso describiría una línea.

76. **(E)**: línea…

77. **(Y)**: Recta. Si, tiene que ser recta, porque como cabe dos veces…

83. **(E)**: ¿No pudiera darse este caso en el problema particular que tienes?

**Episodio 4: Consolidando la argumentación.**

El entrevistador propone una trayectoria distinta al diámetro (Ilustración 157). Esta trayectoria es errónea y pretende obtener más argumentos de la participante para fundamentar el lugar geométrico que propone.

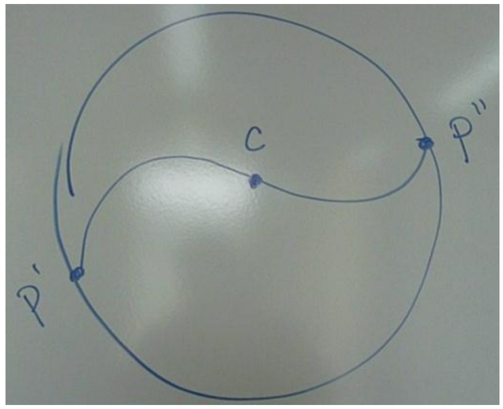



Ilustración 157: Disuasión

La participante reflexiona por unos minutos y bosqueja sobre la figura propuesta, algunos trazos auxiliares en rojo. (Ilustración 158)

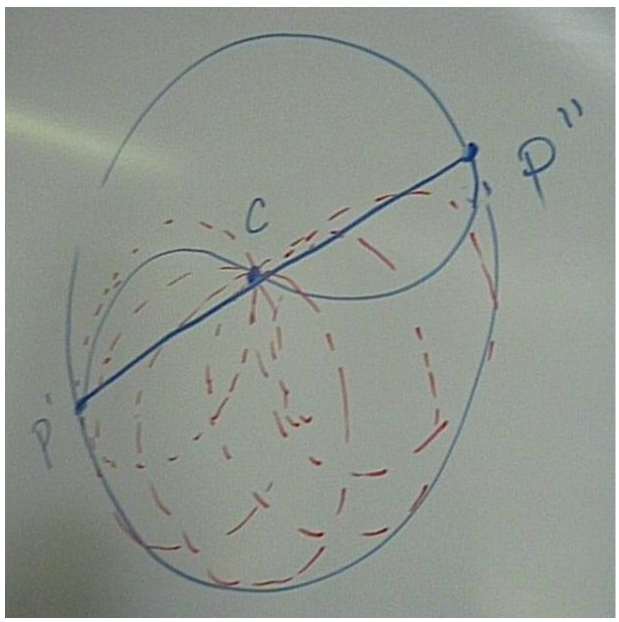



Ilustración 158: El lugar geométrico es un diámetro.

84. **(E)**: … (El entrevistador espera)
85. **(Y)**: A ver, este es el círculo (dibuja el círculo que rueda en una posición inicial). Cuando va más para acá (La participante bosqueja hacia la derecha una segunda posición)… y cuando la hago más para acá… (La participante bosqueja una tercera posición siempre a la derecha)… P va por acá…

La participante sigue dibujando hasta completar 5 posiciones distintas del círculo que rueda. Mientras ajusta su dibujo a una recta que contiene a P. Finalmente traza un segmento de recta que es un diámetro. (Ilustración 28)

86. **(Y)**: Yo digo que va por aquí, ¿no?

La participante ha visualizado correctamente el lugar geométrico que resuelve el problema sin declarar aún que la trayectoria es un diámetro. El entrevistador intenta darle pistas sobre la naturaleza de la trayectoria:

93. **(E)**: Pero no solamente es una recta… es un… como pasa por el centro…
94. **(Y)**: (Susurrando) Ángulo. ¡es un diámetro!
95. **(E)**: Es un diámetro. ¿Convencida?
96. **(Y)**: Sí
97. **(E)**: ¿Y si no?
98. **(Y)**: ¿Y si no? Pues habría que ver por qué no. Yo digo que sí. Debe ser una recta.
99. **(E)**: Pero un diámetro, dijiste.
100. **(Y)**: Bueno, pero un… diámetro. Una recta que pasa por C. Un diámetro.

**Episodio 5: Refracción digital**

La participante ha determinado que el lugar geométrico que alude el problema es un diámetro. Ahora se enfrenta el problema en medio digital.

Se ha dotado a la participante de una computadora con el software Cabri. Simultáneamente se graba la co-acción participante-ambiente digital, en tiempo real a través del software *Camtasia Studio*.

A continuación se hará una cronología de momentos nodales de esta actividad y en algunos casos breves comentarios sobre la importancia de ese momento.

El número que aparece antes del registro, indica el tiempo en que se ubica el comentario respecto al video que recoge la evidencia de la actividad.

***O9:04***

La participante inicia la construcción de su modelo digital

***13:24***

La participante reconsidera su construcción. Involucra un segmento que servirá como deslizador

***19:01***

La participante logra vincular el deslizador con la circunferencia que rueda. (Ilustración 159)

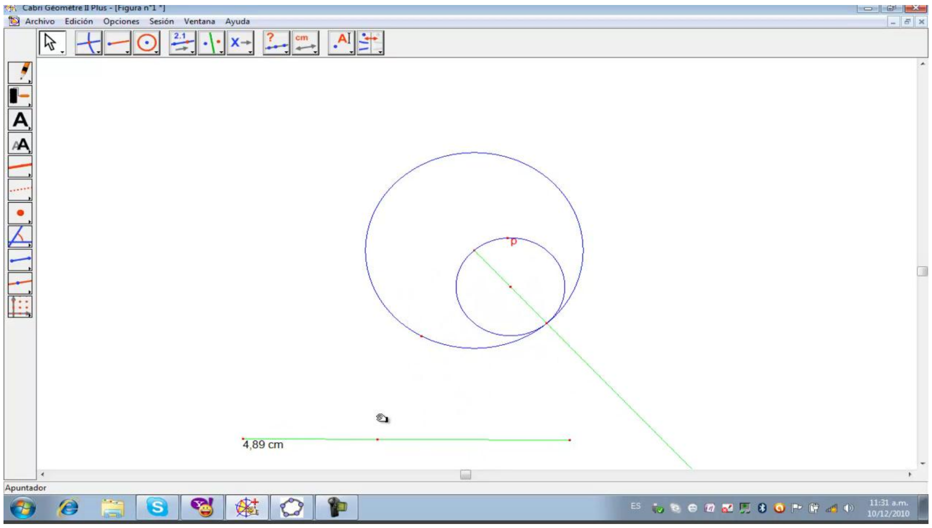


**Ilustración 159: Modelo digital.**

***20:07***

La participante define el punto P sobre la circunferencia que rueda.

***20:25***

La participante determina correctamente el lugar geométrico en el ambiente dinámico. (Ilustración 160)

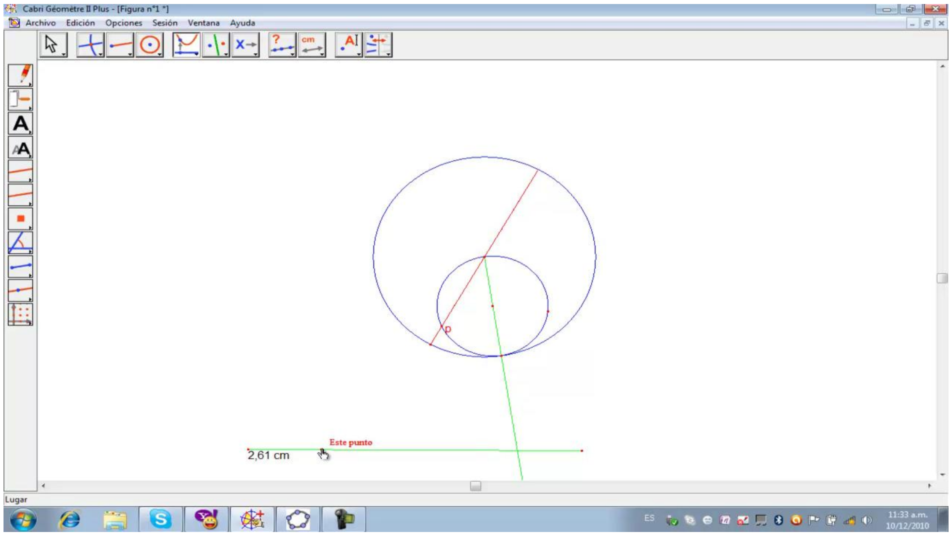



Ilustración 160: iLocus

***20:25***

La participante reconstruye su modelo. Aunque ya ha resuelto el problema, trata de generalizarlo.

***29:22***

La participante obtiene el locus del problema generalizado, el caso en que el radio de la circunferencia rodante es más pequeño que ½ de la contenedora. (Ilustración 161)

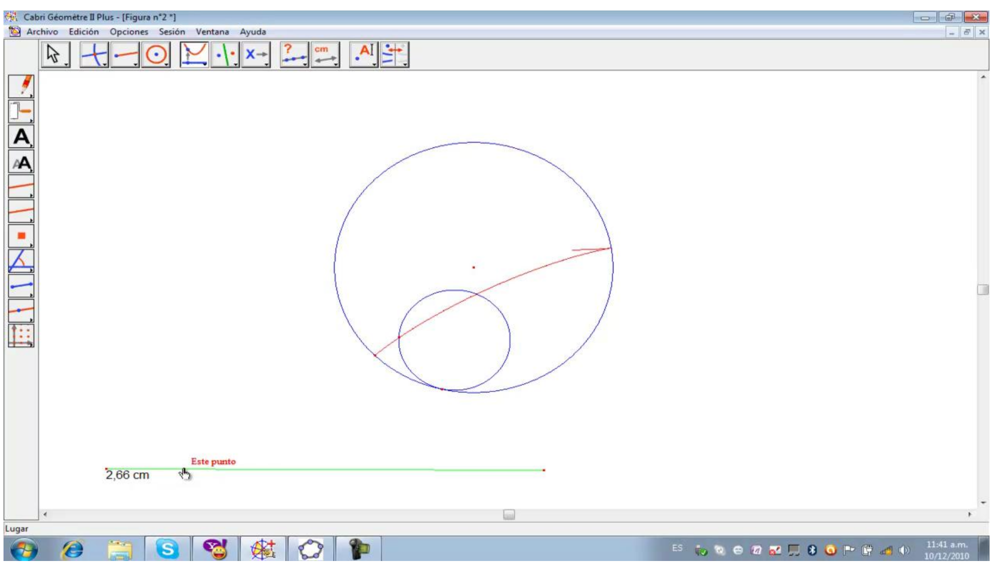



Ilustración 161: Ejecutabilidad

***30:10***

La participante obtiene el locus cuando se hace variar el diámetro de la circunferencia contenedora. (Ilustración 162)

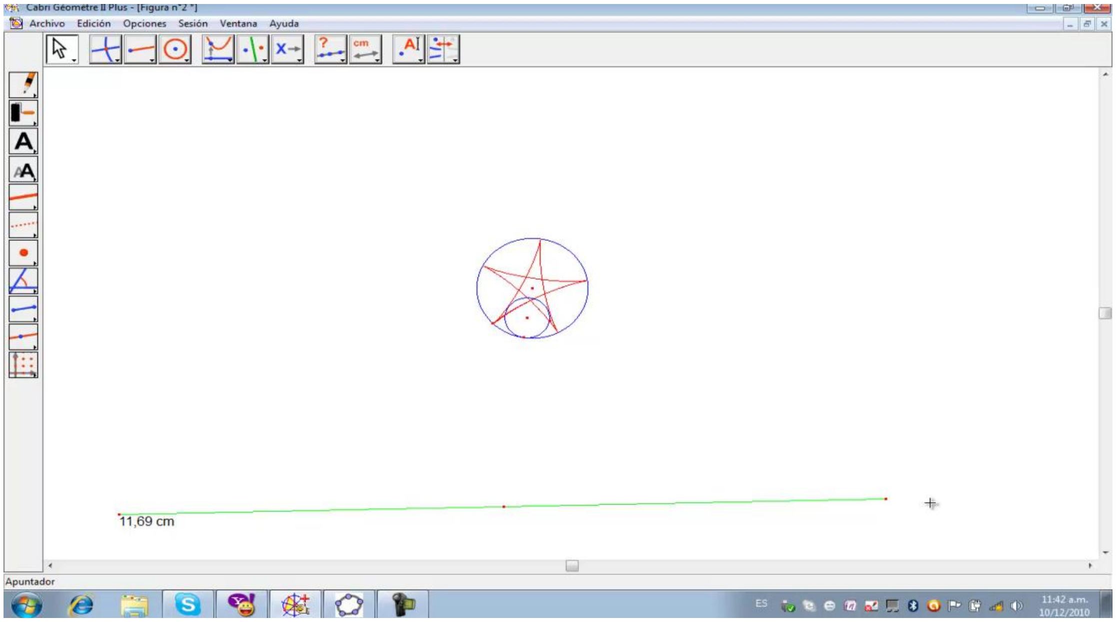



Ilustración 162: Variación del radio en tiempo real.

El deslizador que la participante ha construido le permite tener una representación ejecutable del parámetro asociado al radio del círculo que rueda. Es decir, la generalización del problema planteado. (Ilustración 163)

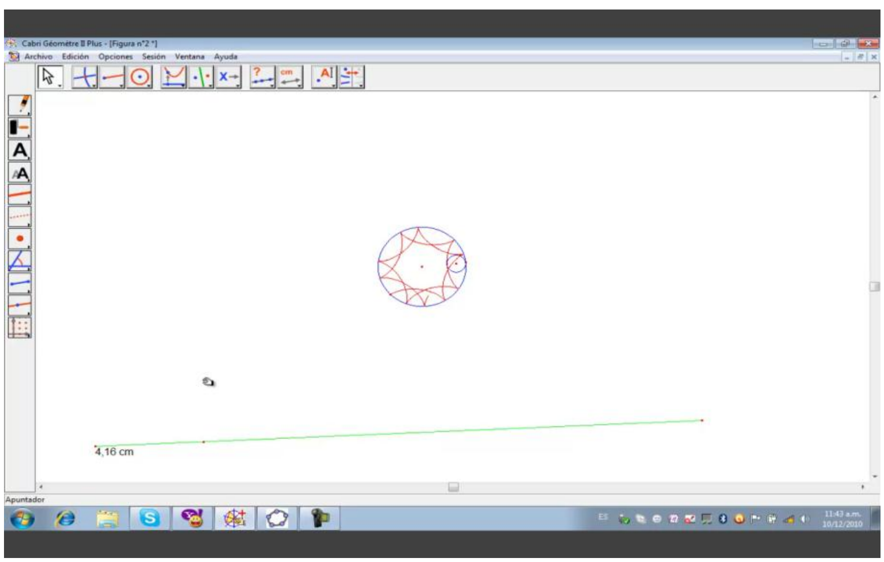



Ilustración 163: Hipocicloide

***31:42***

La participante obtiene el locus cuando el radio de la circunferencia rodante es mayor que ½ de la circunferencia contenedora. (Ilustración 164)

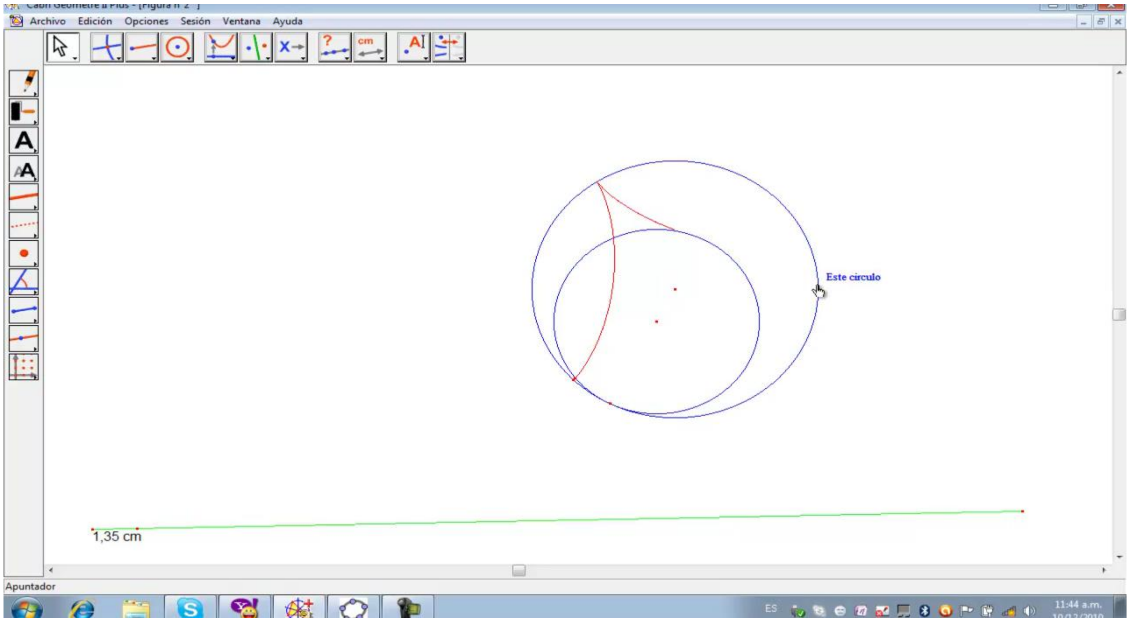



Ilustración 164: Caso especial

# CAPÍTULO VIII

# CONCLUSIONES

## El entorno digital

Durante el proceso de apropiación, los estudiantes-profesores se enfrentaron a problemas específicos en la cual de incorporaron herramientas digitales que permitieron una exploración dinámica de los problemas al tiempo que adquirían un dominio necesario de las principales herramientas de los entornos de cabri y geogebra, principalmente. Al finalizar el periodo de apropiación, el grupo de estudiantes-profesores no mostró dificultad en el uso de los comandos del ambiente en Cabri. Incluso una buena cantidad de ellos incursionaron en otros ambientes similares (geogebra, skechtpad, cinderella) aún sin haber tenido contacto previo con estas variantes de ambientes tecnológicos.

Esta apropiación se hizo evidente cuando los estudiantes-profesores modelaron digitalmente los problemas planteados. Por ejemplo, cuando solicitan al software que muestre el lugar geométrico bajo ciertas condiciones, sólo dicen y pulsan el comando “lugar”, sobre-entendiendo las relaciones estructurales que esa relación implica.

Un ejemplo representativo de la incorporación de dichas herramientas, lo da la línea 49 de la transcripción de la entrevista a un profesor. La idea de tener un objeto matemático que se puede estirar es ya una evidencia de la forma en que la tecnología digital moldea el pensamiento. La acción del sujeto sobre este objeto dentro de un entorno dinámico se ve afectado por las características mismas de este entorno. Tenemos una co-acción.

***"49. ($S_5$)****: Lo primero que hice fue tener un segmento que sea... dinámico. Que crezca..."*

## Superficies interactivas

Otro aspecto que se puede resaltar es el proceso de apropiación de la superficie Interactiva por parte de los estudiantes-profesores.

El antecedente en el uso del pizarrón digital, para algunos de ellos, se ubica en el programa *enciclomedia.* Este proyecto logró incorporar al mobiliario de las escuelas los equipos de cómputo y los pizarrones necesarios para cubrir las aulas de primer grado. Sin embargo, los profesores refieren poca o nula actividad con los equipos.

En principio, la SI generó altas expectativas porque representa una posibilidad real de llevar actividades interactivas al salón de clases. El total de profesores participantes en esta investigación, han logrado incorporar esta tecnología en su práctica cotidiana.

El ambiente que genera la SI dentro del salón de clases, promueve una discusión grupal que puede favorecer la validación de conjeturas. Por ejemplo, durante el proceso de apropiación de la SI, se propuso el problema de “El chute”, cuyo interactivo permitió explorar la propiedad de que 5 puntos determinan una única cónica. (Ilustración 165)

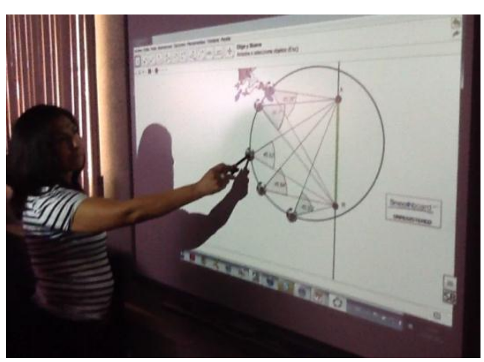


Ilustración 165: Exploración de cónicas

Los estudiantes- profesores *descubrieron* que además del círculo, la parábola y la elipse, era posible obtener una hipérbola, solo con manipular alguno de los 5 puntos representados a través de balones de futbol. (Ilustración 166)

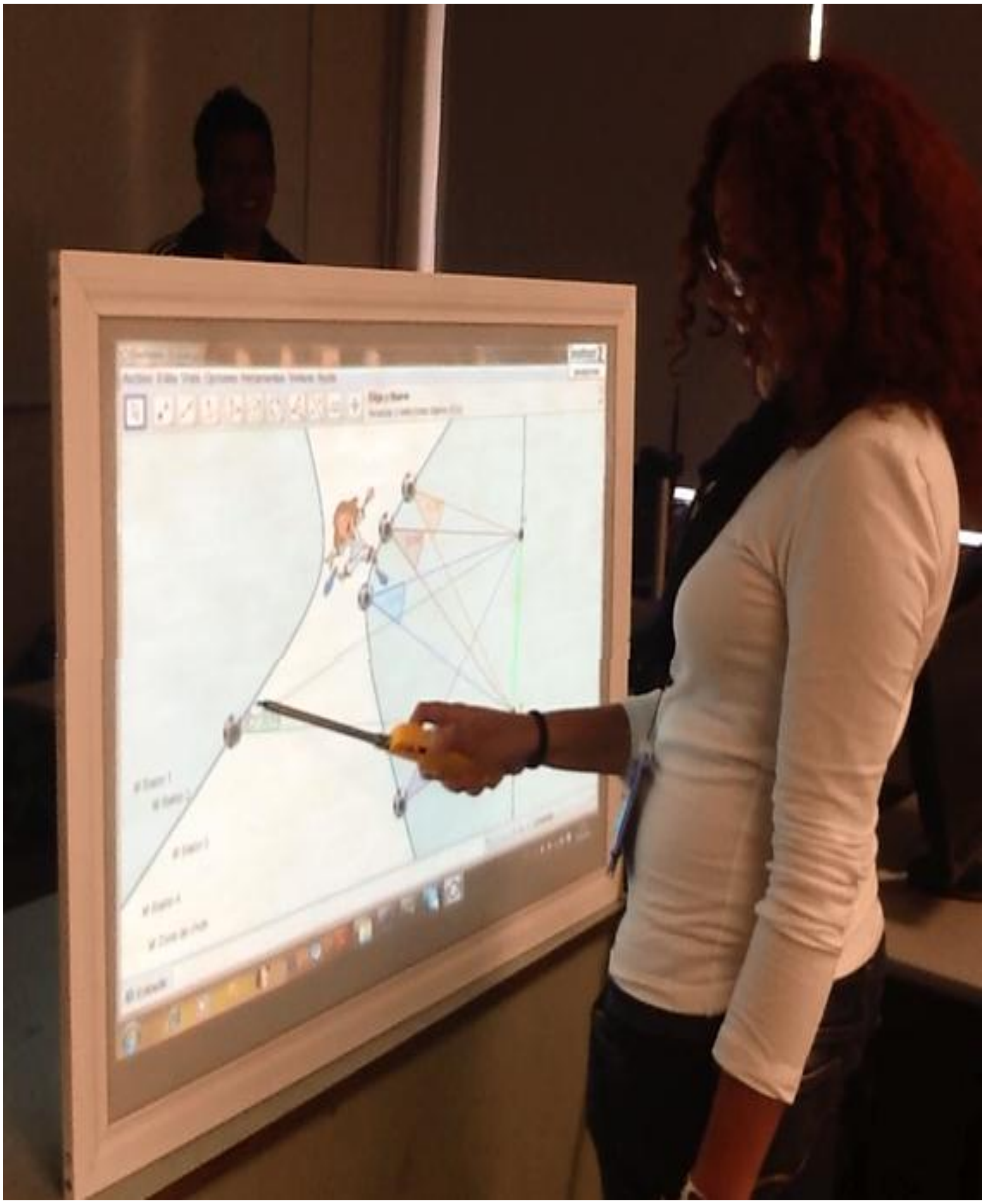


**Ilustración 166: Cinco puntos determinan una hipérbola**

## Rasgos cognitivos exhibidos por los estudiantes-profesores

Durante la entrevista fue posible documentar expresiones cuya estructura puede clasificarse como conjeturas, pues son enunciados que el estudiante considera ciertos aunque no los haya probado aún. Por ejemplo, en la línea 63 de la entrevista a Mariana, sobre la posición de un punto para obtener la longitud mínima en el problema del triángulo (véase página 63), conjetura:

***"63. (S₃)**: No sé… espérame… déjame pensar… ¡Ya sé! Es cuando aquí se forma un ángulo isósceles… (Obviamente, la participante se refería a que la solución posiblemente se daba cuando el triángulo MCN es isósceles)"*

También hay esfuerzos por enunciar teoremas. Por ejemplo, en el renglón 65 de la entrevista al participante 6, el estudiante establece:

***"65. ($S_6$)**: Entonces, si cabe 2 veces haría una línea…"*

Un rasgo distintivo que se hace evidente en los estudiantes-profesores, es que externalizan expresiones que permite evidenciar el efecto de la tecnología digital en la que están inmersos durante la resolución del problema; es decir, queda latente en la propia acción el efecto del instrumento mediador.

En un ambiente de lápiz y papel, el participante 2 reflexiona a partir de un bosquejo estático que ha plasmado en el pizarrón:

*"**13.** (**$S_2$**): si considero a P sobre la recta $F_1F_2$, entonces P lo divide en tres partes, entonces este sería **l** y este sería **2l**… y si el punto P lo paso hacia abajo, tiene que ser necesariamente el simétrico de P con respecto a la recta ($F_1F_2$). Pareciera, por lo menos en este caso, que P nuevamente va a vivir en otra recta. Pero la recta esta… la recta ya no es la mediatriz. Pareciera ser que la recta está*

*desviada o está a una distancia $F_2$ la mitad de la distancia a $F_1$. Para este caso particular."* (Ilustración 167)

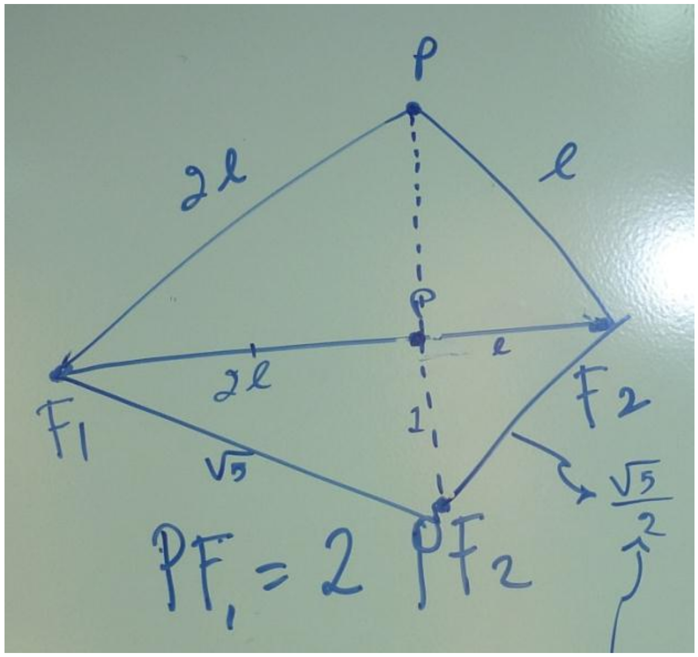



Ilustración 167: Una construcción estática

El estudiante-profesor, supone erróneamente que el cuadrilátero puede tener esas dimensiones. Para preservar la proporción 1:2 entre los segmentos, bosqueja un triangulo rectángulo cuyo cateto e hipotenusa miden lo mismo.

Al argumentar su dibujo, se da cuenta de la imposibilidad de esas dimensiones. No avanza más.

En el contexto del problema, la representación estática no le conduce a reconocer el lugar geométrico solicitado. En cambio, cuando modela su problema en geogebra, esta dificultad es reducida notablemente por el efecto visual que su construcción ofrece. (Ilustración 168)

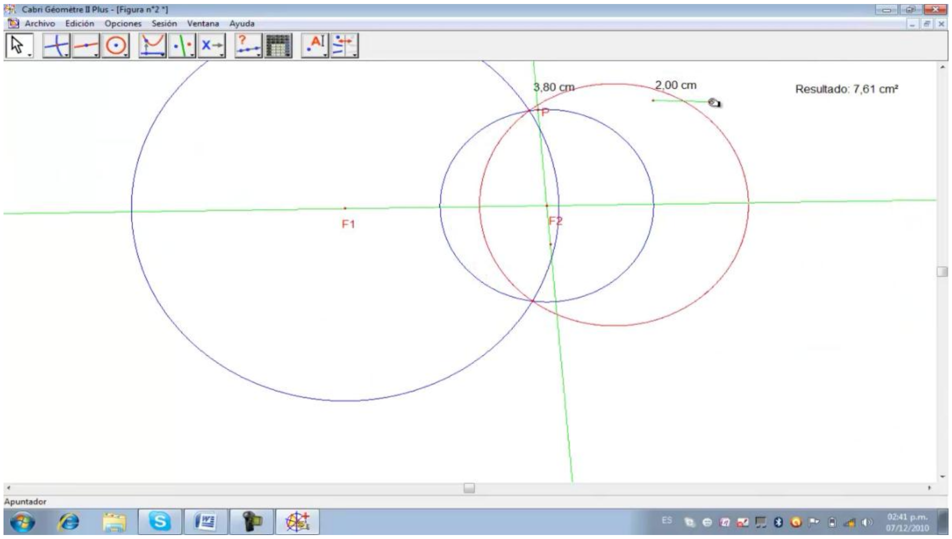



Ilustración 168: Refracción digital

## Preguntas de investigación.

El tratamiento de los datos y las evidencias recogidas en la experimentación, permiten retomar las preguntas de investigación. A continuación describiremos los principales resultados en cada una de ellas.

- **¿Cómo se vincula con los saberes existentes en momentos nodales de la historia de la matemática la idea de locus?**

Fueron los griegos quienes con su geometría, introdujeron las ideas y nociones que permitieron el desarrollo sin precedentes de una matemática formal. Particularmente los problemas clásicos ponen al descubierto la frontera epistemológica de los instrumentos de trazado geométrico.

Consideramos que el surgimiento de máquinas matemáticas en la edad media, que permitían trazar mecánicamente algunas curvas, puede ser considerado como un periodo de transición entre la geometría de regla y compás  de los griegos y la geometría dinámica de la era digital.

Estas máquinas entre las que se encuentran los elipsógrafos de Van Schooten y el de Da Vinci, así como el "Square Moving" de Newton, representan un estrado de transición entre la geometría estática de los griegos, y la geometría dinámica propia de la cultura digital. (Ilustración 169).

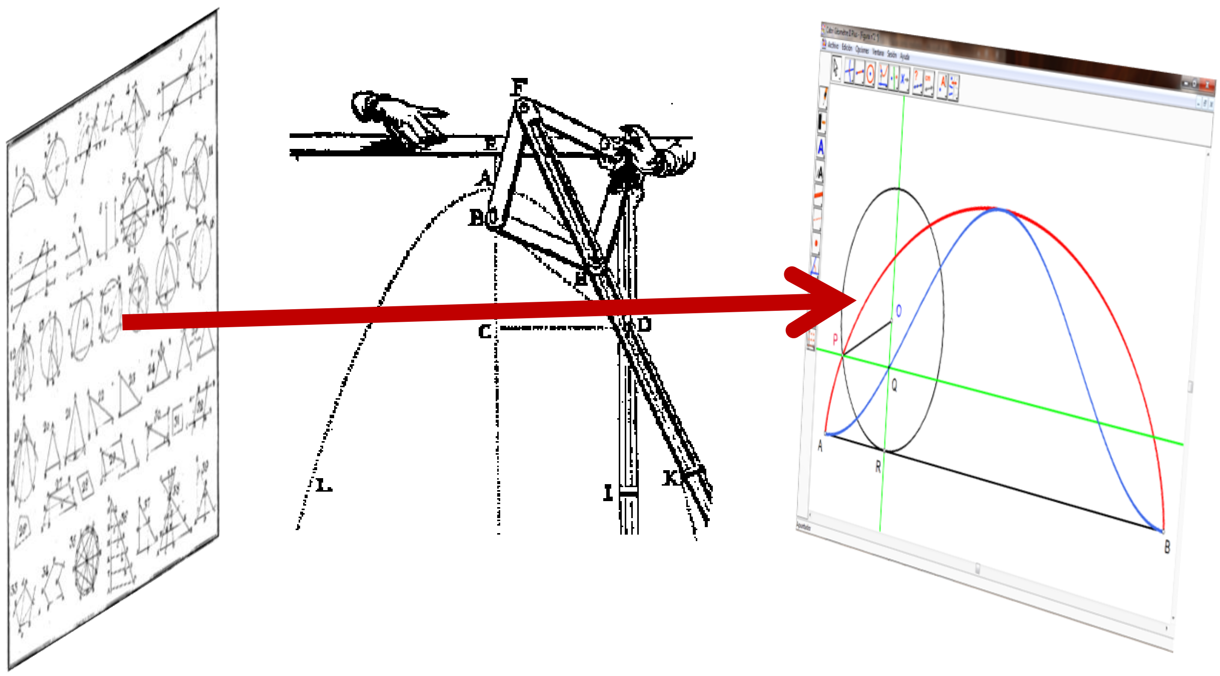


Ilustración 169: Tres momentos

- **¿En qué contextos históricos se concibieron los lugares geométricos como la trisectriz de Hippias, la cicloide, la versiera de Agnesi, etc.?**

Los lugares geométricos han emergido en la vida matemática desde varias aristas. Desde los primeras formas reconocibles en las estrellas, por los primeros humanos, asociados a formas cotidianas del entorno; las construcciones abstractas de la geometría plana de los griegos, los pasos divergentes de matemáticos de la talla de Arquímedes; la desaceleración constructiva del oscurantismo medieval, hasta la inagotable expresividad de las tecnologías digitales, han sido caldo de cultivo de creativas formas geométricas cuyas propiedades siguen cautivando las mentes de nuestra especie. Pero cada curva, cada locus responde a un contexto histórico determinado.

Ejemplo de ello son las curvas que resuelven los tres problemas clásicos.

Pero también hay otras marcadas por los propios personajes y ancladas para la posteridad. En este rubro podemos enmarcar a la braquistrócona y la cicloide que resuelven el problema de la curva que permite el mínimo tiempo para el recorrido entre dos puntos y la elocuente frase “por las garras se conoce al león” en referencia a la solución que de manera anónima ofreció Sir. Isaac Newton ante un reto de Johan Bernoulli.

También se puede citar el ejemplo de la “bruja de Agnesi”, como un posible error de traducción que ha trascendido el tiempo y que da cuenta de la importancia que esta curvas tienen en el entramado matemático de hoy día.

- **¿Cuáles eran las motivaciones para considerar estas curvas?**

Se pueden citar diversas situaciones que han permitido el surgimiento de curvas importantes en la historia. Sin embargo, como hemos mencionado en párrafos anteriores, los motivos responden principalmente al contexto histórico.

- **¿Qué cambia la acción cognitiva al incorporar artefactos digitales en problemas que involucran lugares geométricos?**

Principalmente, las herramientas digitales vienen a dotar a los modos de representación, de una expresividad que permiten exploraciones innovadoras. En algunas ocasiones esta expresividad se torna inédita y permite elaborar rápidamente conjeturas que llevan a la mejor comprensión del objeto matemático en estudio.

Sostenemos que la exploración de las propiedades matemáticas a través de la tecnología digital lleva al individuo, en un primer momento, a **pensar con** esta herramienta. El ejemplo del descubrimiento de la hipérbola a través de los cinco puntos permite sostener esta afirmación, pues se llegó a esta curva, distinguiéndola de las otras conocidas.

También sostenemos que se puede pensar a través de la tecnología digital. La s evidencias de estas formas de pensamiento, la hemos ejemplificado en la frase:

"*Lo primero que hice fue tener un segmento que sea… dinámico. Que crezca…"*

- **¿Qué papel juegan las *representaciones ejecutables* en el proceso de internalización del concepto de lugar geométrico?**

Los estudiantes-profesores generaron conjeturas sobre la naturaleza de los conjuntos de puntos que resuelven un problema que involucra el concepto de lugar geométrico. En este sentido, es necesario distinguir dos maneras de interactuar con las herramientas digitales.

Por una parte, en el proceso de apropiación de los comandos del software, los estudiantes-profesores realizaban diseños geométricos cuidando la relación estructural que permitiera mantener las propiedades al momento del arrastre. Ello permitió internalizar los principales comandos.

Por otra parte, se ofrecieron construcciones matemáticas acabadas, que permitían solo la exploración del lugar geométrico en cuestión. Este tipo de herramienta no requiere de la construcción estructural por parte del individuo que lo usa, sino que responde más bien al interés didáctico de exploración de una propiedad matemática en particular.

En resumen se trata de pensar con y a través de las herramientas digitales.

- **¿Cómo interviene la dimensión temporal, o ejecución en tiempo real, en el proceso de internalización del concepto de lugar geométrico?**

La superficie interactiva, permitió una participación dinámica de los estudiantes-profesores a nivel grupal. La ejecución en tiempo real, dio pauta a la reflexión en momentos críticos de la sesión. Por ejemplo, cuando se exploraba la solución para el problema del lugar geométrico del vértice cuyo ángulo mide la mitad que uno dado, la interacción grupal permitió establecer rápidamente el efecto de acercar o alejar este vértice a la pareja de puntos pre-estabecida.

Las voces generalizadas en el salón de clase, en ocasiones confrontan con las primeras apreciación del individuo que interactúa con la superficie.

Pero esto es posible de manera dinámica por la ejecución en tiempo real que ofrece la interactividad de esta superficie a nivel grupal. A diferencia de la situación en que el mismo problema se resuelve individualmente en computadoras dispuestas en un aula de cómputo, por ejemplo; cada individuo se sumerge en sus propias conjeturas reduciendo las posibilidades de confrontación de ideas en tiempo real con el resto de los compañeros de clase.

- **¿Qué nuevos rasgos hacen visible las representaciones digitales *i-Locus*?**

  El lugar geométrico puede entenderse como una generalización de la solución de un problema. El iLocus va más allá.

  Mientras el locus es un conjunto solución de algo que satisface ciertas condiciones, el iLocus es un **medio** para reconocer relaciones matemáticas para después reconstruirlas y explicarlas.

  El iLocus ofrece una visión más completa y compleja de los conjuntos de soluciones, por lo que representa una nueva herramienta de mediación que permita pensar con y a través de ella.

  Lo que en otros tiempos era privativo de mentes entrenadas para visualizar estos comportamientos matemáticos, ahora, con la tecnología digital, esta representación se encuentra disponible a la visión del estudiante común. Ese es el poder expresivo de la tecnología.

## La tecnología transparente

A modo de conclusión general, citaré de nuevo la frase que muestra una manera de pensar con y a través de la tecnología:

"Lo primero que hice fue tener un segmento que sea dinámico, que crezca…"

Esta expresión emergió en la voz de un estudiante, en el seno de la resolución de un problema matemático. Esta evidencia de pensamiento sugiere que la geometría dinámica, como la escritura, algún día puede tornarse transparente, (Ilustración 170), se naturalizará en los individuos.

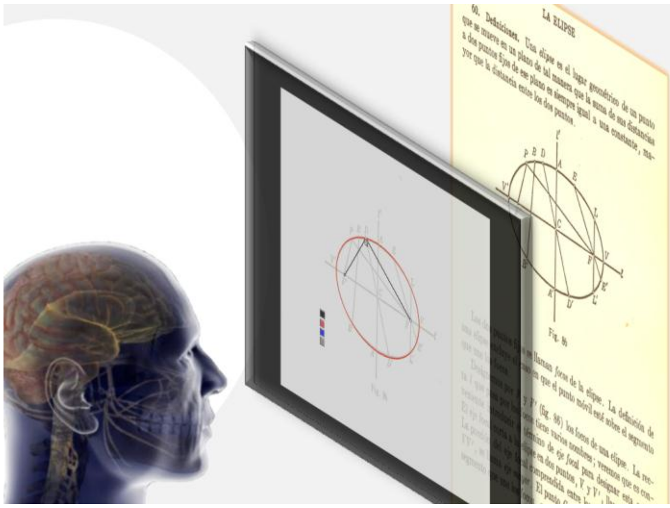


Ilustración 170: La tecnología transparente: Amplificación

La tecnología es, en primera instancia una herramienta que amplifica de las capacidades del individuo y en consecuencia adquiere el papel de reorganizador su cognición. (Ilustración 171)

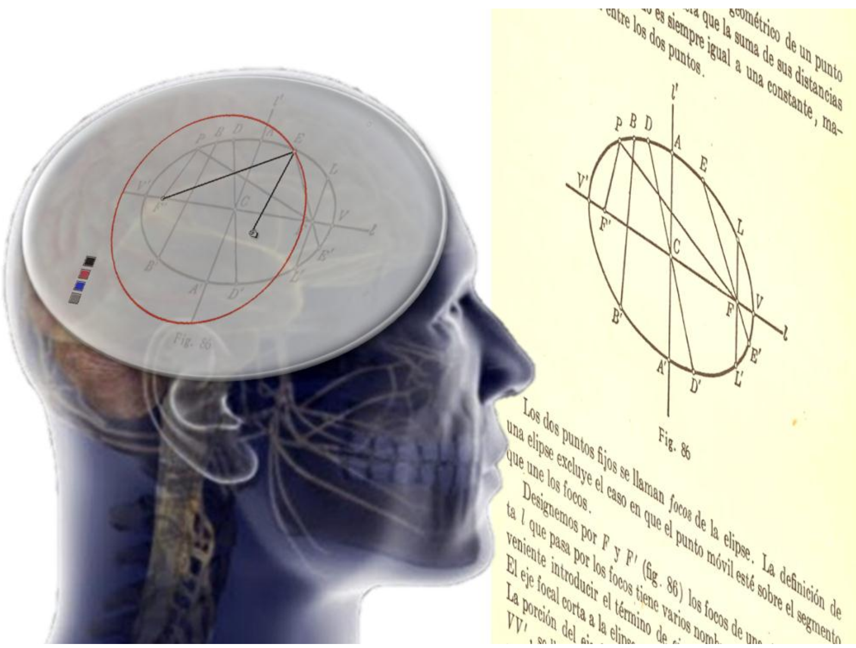



Ilustración 171: La tecnología transparente. Reorganización

# REFERENCIAS

Álvarez, J. (2006). *Curvas en la historia 1.* Nivola.

Álvarez, J. (2006). *Curvas en la historia 2.* Nivola.

Barot, M. (2005). *Un paseo a hiperbolia.* México: S y G Editores.

Beckmann, P. (2006). *Historia de π.* Distrito Federal: Conaculta.

Bell, E. T. (2010). *Historia de las matemáticas.* México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Borchardt, L. (1896). Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde. *Journal of the Egyptian Language and Archeology, 34*, 75-76.

Bruner, J. (1991). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Alianza.

Bruner, J. (2005). *El habla del niño.* Barcelona: Paidós.

Bruner, J. S. (1995). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid.: Ediciones Morata S.L.

Bulajich, R. &. (2009). *Geometría.* México: UNAM/SMM.

Cárdenas, S. (2008). *Dos o tres trazos.* México: UNAM.

Chamoso, J. &. (2009). *Burbujas de arte y matemáticas.* Tres Cantos: Nivola.

Chassapis, D. (1999). The mediation of tools in the developmentof for¿mal mathematical concepts: the compas an the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*(37), 275-293.

CIAEM/ICMI. (2007). *Temas selectos en Educación Matemática.* México: Ángeles Editores.

Cuéllar, H. &. (2004). *Problemas para pensar geometría.* Bogotá: Colombia aprendiendo.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogía.* Barcelona: Paidós.

De Guzmán, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometría.* Tres Cantos: Nivola.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Falconi, M. &. (2005). *Instrumentos y matemáticas. Historia, fundamentos y perspectivas educativas.* México: UNAM/UPN.

Geertz, C. (1992). *La interpretación de las culturas.* Barcelona: Gdisa editorial.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools in to mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers fro Mathematical Learning.*(3), 195-227.

Hegedus, S.J. & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technology environments. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 26-31.

Imaz, C. &. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo.* México: Trillas.

Kozulin, A. (1990). *La psicología de Vygotsky. Biografía de unas ideas.* Madrid: Alianza Editorial.

Lozares, C. (2000). La actividad situada y/o el conocimiento socialmente distribuido. *Papers: revista de sociología*, 97-131.

Morales, L. (2002). La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría. *Ciencias*.

Moreno, L & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículum de matemáticas. *Memorias del Seminario Nacional de Fromación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.*, 40-66.

Moreno, L. & Waldegg, G. (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología.* México, D. F.: Santillana.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En M. d. Nacional, *Memorias del Seminario Nacional. Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (págs. 81-86). Bogotá: Enlace Editores LTDA.

Moreno, L. (2003). Cognición y mediación instrumental. *VI Congreso Nacional de Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula.*, 67-80.

Moreno, L. (2010). La refracción matemática a través de cabri. *V Congreso Iberoamericano de Cabri. IberoCabri 2010. Resúmenes* (págs. 17-18). Querétaro: Hear Industria Gráfica.

Moreno, L. (2011). La semiótica y lo digital: dominios coextensivos. *XIII CIAEM-IACME.* Recife, Brasil.

Moreno, L., & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 505-519.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* USA.

Pozo, J. I. (2001). *Humana mente. El mundo, la conciencia y la carne.* Madrid: Morata.

Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética.* Bucaramanga: Ediciones Universidad de Industriual de Santander.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphics calculator use on tramslation from graphic to symbolic form. *Eduactional Studies in Mathematics, 21*, 431-450.

Sánchez, C. &. (2001). *Los Bernoulli. Géometras y viajeros.* Tres Cantos: Nivola.

Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos.* México: Trillas.

Saumells, R. (1971). *La geometría euclídea como teoría del conocimiento.* Madrid: Rialp.

School of Mathematics and Statistics. (2009). *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado el 29 de Diciembre de 2009, de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7ehistory/index.html

Sibilia, P. (2006). *El hombre postorgánico.* Buenos Aires: FCE.

Simone, R. (2001). *La tervera fase. Formas de saber que estamos perdiendo.* Madrid: Santillana Ediciones.

Smoothboard.net. (2012). Smoothboard Tech. *Smoothboard Use Guide*.

Tamayo, M. (2005). *El proceso de la investigación científica.* México: Limusa.

The Mathematical Association of America. (2000). *Using history to teach mathematics. An international perspective.*

Vasíliev, N. &. (1980). *Rectas y Curvas.* Moscú: Mir.

Vygotsky, L. (2010). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. (1985). *Vigotsky y la formación social de la mente.* Barcelona.: Paidós.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente.* Madrid.: Visor Distribuciones.

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la Mente.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Williams, C. (1984). *Los orígenes de la forma.* Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the foundations of mathematics.* Oxford: Basil Blackwell.

## TABLA DE ILUSTRACIONES

## Epílogo

Este documento puede descargarse a través del siguiente código o con la dirección que se especifica. La finalidad es que el lector, pueda realizar sus propias exploraciones digitales de los lugares geométricos en las condiciones que se describen en esta tesis.

**https://dl.dropbox.com/u/39455434/iLocus.pdf**

Para visualizar correctamente los interactivos, se debe instalar el software

- **Cabri II Plus**
- **Plug-in 1.4.5 para cabri**
- **Geogebra**
- **Power Point**.