**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS**
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD DISTRITO FEDERAL
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

# GEOMETRÍA DINÁMICA Y VARIACIÓN EN UN AMBIENTE DE TALLER EN LÍNEA

Tesis que presenta

**JOSÉ LORENZO SÁNCHEZ ALAVEZ**

para obtener el Grado de **Maestría en Ciencias**
en la especialidad de Matemática Educativa

DIRECTOR DE TESIS:
**DR. LUIS E. MORENO ARMELLA**

México, D. F., Octubre de 2008

A la memoria de mi preciosa hija **Fania Janí** +

*Hola princesa*. Cuando buscamos el nombre que vislumbrara el futuro que deseábamos para ti, elegimos la mejor aproximación al significado de **sueños de mujer libre**, que solo encontramos en esta excepcional combinación de latín y mixteco. Mi amor, hoy seguimos en esa frenética búsqueda, porque sigues aquí, a nuestro lado. Para siempre.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico a través de la beca No.**192116**, para cursar los estudios de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, con especialidad en Microcomputadoras en Educación Matemática.

Agradezco a la Dirección General de Educación Secundaria Técnica, las facilidades otorgadas para la realización de estos estudios a través la Beca-Comisión comprendida en el periodo 2005-2006.

**AGRADECIMIENTOS**

Estoy profundamente agradecido con todas las personas que se han visto involucrados en este esfuerzo y, sobre todo, a aquellos que representaron puntos de inflexión en mis momentos críticos:

Al **Dr. Luis Enrique Moreno Armella**. Por su enorme paciencia y, hay que decirlo, por su leonina confianza en que este *ente de cognición neolítica* se apropiara de nuevas herramientas materiales y simbólicas.

Al **Dr. Gonzalo Zubieta Badillo**. Sinodal de tesis. Por su loable altruismo en el salón de clase. Por su franqueza.

Al **Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco**. Sinodal de tesis. Guía en mi abrupto proceso de adquisición de un nuevo lenguaje.

A **mis maestros** y a los maestros del Departamento de Matemática Educativa. Por todo.

A **Erica**. Amor de toda la vida. Porque éste trabajo es inexorablemente producto de su complicidad y esfuerzo.

A **Axel, Jesi y Dérek**. Por aceptar  jugar conmigo en tiempo diferido. Ahora, lo justo será que se tornen en tiempo real. Los amo.

A **José**, **Reyna**, **Manuel**, **Gude**, **Lety**, **Paty**, **Omar**. A **Reyna**, **Angel** y **Jazza**. A **Víctor** y **Galia**. A  **Marlene**. Por la fortaleza compartida en los tiempos terribles.

A **Mario Rivera**. Maestro, amigo, ejemplo a seguir. Por hacerme partícipe en tareas de enseñanza que me dejan más aprendizajes.

A **Higinio Barrón**. Quien me mostró la diversidad de caminos inaccesibles e interesantes, que se puede elegir en este arduo y estoico quehacer docente.

A **Delia Montes**. Por su aguda y clarificante visión, en los primeros acercamientos a este trabajo de investigación.

A **Luis**, **Gerardo**, **Vladimir** y **Pelayo**. A **Moi**. Por hacer de mi estancia en el DME, una experiencia que a diario se teñía inusual, divertido, interesante y… complicado.

A **Adriana Parra**. Por su comprensión continua y valiosa disposición a resolver mis interminables problemas administrativos.

A **Gerardo Vázquez** y **Salvador Zamora**. A **Miguel A. León**, **Juan Carlo Xique** y **Alejandro Carrillo**. Compañeros de quien siempre se aprende algo diferente… cuando están.

A **María. A Geno**, **Aure**, **Irma**, **Lalo**, **Horacio** y **Héctor**. Compañeros de *Evaluación del Aprendizaje*, que a diario renuevan mi compromiso con la educación pública.

A **Gerardo Ramos Olaguibel**. A **José Pérez**. Por dejarme ser.

A **Adrianita**. Porque conservo aún mi trabajo, gracias a su persistente intervención.

A los **profesores** y **alumnos** de la Educación Básica y los de Educación Media superior. Motivo de mis motivos.

## ÍNDICE

La velocidad del cambio de los fabricantes de hachas iba a desbordar permanentemente a los educadores, desde entonces hasta la actualidad.

**James Burke y Robert Ornstein**

# INTRODUCCIÓN

El presente documento muestra los resultados de un estudio que tuvo como principal fuente de análisis las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en un ambiente de resolución de problemas geométricos donde interviene el concepto de variación, así como el papel mediador de la tecnología en este proceso.

Los instrumentos que intervinieron en esta exploración son los software de geometría dinámica *Cabri Géomètre* y *The Geometer's Skechtpad*, con la particularidad de la mediación vía taller virtual en línea.

En el primer capítulo se plantea el problema de investigación a través de preguntas que guiaron el desarrollo del estudio, enfatizando los objetivos del mismo.

Un segundo capítulo sirve como marco teórico referencial donde convergen una serie de ideas que fundamentan el papel mediador de la tecnología en el desarrollo de habilidades cognitivas involucradas en la educación matemática, y que se sustentan en la construcción social del conocimiento.

La metodología que rigió el trabajo de investigación, se describe detalladamente en el capítulo tres. En él, se retoman aspectos relevantes de las fases en que consistió el estudio, dando un importante espacio a las actividades que se propusieron con el grupo de trabajo: problemas geométricos donde interviene el concepto de variación y el uso de geometría dinámica.

El análisis de la información que se desprendió de las actividades propuestas, así como la descripción de las eventualidades que siguieron a la experimentación, son dictadas en el capítulo cuarto. En él se incluyen las reflexiones generadas a partir de las dificultades que se presentaron con mayor frecuencia en la resolución de los problemas, y las implicaciones de hacer uso de herramientas tecnológicas específicas.

Finalmente se ofrece una serie de comentarios que se agrupan en tres grandes rublos: primero, las conclusiones que se desprenden del estudio; segundo, las implicaciones que tiene en la educación matemática los resultados obtenidos y, por último, las recomendaciones que se pueden brindar en base a la información recabada.

# PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## Antecedentes

La construcción de herramientas se ha consolidado como parte esencial de la conducta humana y sus repercusiones se manifiestan en la capacidad de adaptación que ha logrado como especie. La gama de instrumentos, herramientas, artefactos y demás ingenios que se han generado como alternativa de satisfacción a una necesidad o solución a un problema  práctico, es inmensa.  Estos utensilios construidos con propósitos deliberados, constituyen el rasgo distintivo que singulariza a nuestra especie (Moreno, 2002).

Las herramientas constituyen el fenómeno técnico que ha propiciado el paso de una a otra de las Grandes Fases de la Historia del Conocimiento; pues de manera continua se inventan “instrumentos”, materiales nuevos vinculados con el conocimiento: primero el estilo y la pluma, después la imprenta, y actualmente las computadoras y los medios de comunicación modernos como la Internet (Simone, 2001). El otro fenómeno que ha favorecido este avance, es el mental; éste está constituido, primero, por el paso de la oralidad a la escritura  y después de la lectura a la “visión” y a la escucha.

Hoy, no se concibe un astrónomo sin un telescopio con las especificaciones suficientes, que le permita hacer observaciones con el rigor científico que ello requiere; un médico usa la resonancia magnética para dictar un diagnóstico preciso; el físico utiliza  aceleradores de neutrones paras estudiar propiedades de la materia inexplorados e inaccesibles hasta hace unas cuantas décadas. En este sentido, las actividades descritas en este párrafo, dan cuenta de que en cada momento del desarrollo social y cultural, las sociedades recurren a tecnologías nuevas para mejorar lo que se sabe hacer y, sobre todo, para hacer cosas nuevas. (Moreno, 2003)

De esta manera, el libro ya no es el principal emblema del saber y la cultura; pues la computadora, especialmente cuando está conectada a la Internet, la televisión (cuando adquiera el carácter de interactiva), y el teléfono (entendido como puerta hacia otros mundos), representan mejor la situación actual. (Simone, 2001)

Históricamente, estamos viviendo un interesante momento como especie, en que la tecnología ofrece la oportunidad de potenciar nuestros sentidos y, por ende, la razón. En particular, en educación matemática, existen herramientas específicas que pueden incidir en la percepción de los objetos matemáticos y que permiten enfocar nuestra atención a los conceptos mismos más que a los procesos operativos y/o algebraicos inherentes. Las herramientas disponibles que nos permiten un mejor acercamiento a las ideas matemáticas, adquieren diferentes matices: hay aquellos que utilizan un soporte informático y que se popularizan rápidamente en el ámbito académico especializado, como lo que se conoce como *Geometría Dinámica*, y que permite una extraordinaria exploración de los conceptos geométricos; también podemos encontrar instrumentos que nos permite el acceso a estos programas como la computadora personal o las calculadoras graficadoras con sistema de Cómputo Algebraico (CAS, por sus siglas en inglés). Estos instrumentos mediadores representan en sí mismos un campo de acción donde se pueden construir detalladas aplicaciones didácticas para el estudio y un mejor acercamiento a la ciencia.

En problemas geométricos donde interviene el concepto de variación, la tecnología adquiere un papel importante; pues las dificultades que se presentan en su estudio han sido documentadas en diversos trabajos y en donde se ha enfatizado el papel mediador de estas herramientas tecnológicas.

Las representaciones semióticas (Duval, 1999), de los objetos matemáticos relacionados con el cálculo diferencial y, sobre todo, el vínculo cognoscitivo entre ellos, es poco común; en particular las representaciones visual-gráfica y analítico-algebraica son las que presentan mayor dificultad (Dreyfus, 1990). Aunado a esto, en la mayoría de las veces, los bosquejos hechos por el profesor en el pizarrón no son una buena representación de la función deseada (Poveda & Salas, 2003).

## Estructura del estudio

El planteamiento del problema de investigación requiere de la puntualización de los siguientes aspectos que estructuran el estudio:

Por una parte están las nociones matemáticas que se pretenden desarrollar; es decir, los conceptos fundamentales de la matemática que se van a abordar en el estudio y que giran en torno a las ideas de variación y su relación en problemas de índole geométrico.

En segundo lugar, es necesario enfatizar el uso de la geometría dinámica y el ambiente virtual de un taller en línea como instrumento de mediación; puesto que esta herramienta tecnológica, como muchas otras, juega un papel relevante en el desarrollo de las habilidades que se deben promover. Esta herramienta constituye un sistema ejecutable de representación, que virtualmente llevan a cabo funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos (Moreno & Waldegg, 2002).

Finalmente, la propuesta de trabajo que relacione los dos componentes anteriores y que puntualiza la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.

## El problema de investigación

El propósito de este estudio, es explorar los procesos que siguen a la representación de símbolos matemáticos en un ambiente de matemáticas dinámicas, es decir, un ambiente digital que juega un papel de mediación entre una persona y el símbolo matemático cuya instancia electrónica se encuentra en la pantalla. (Ilustración 1)

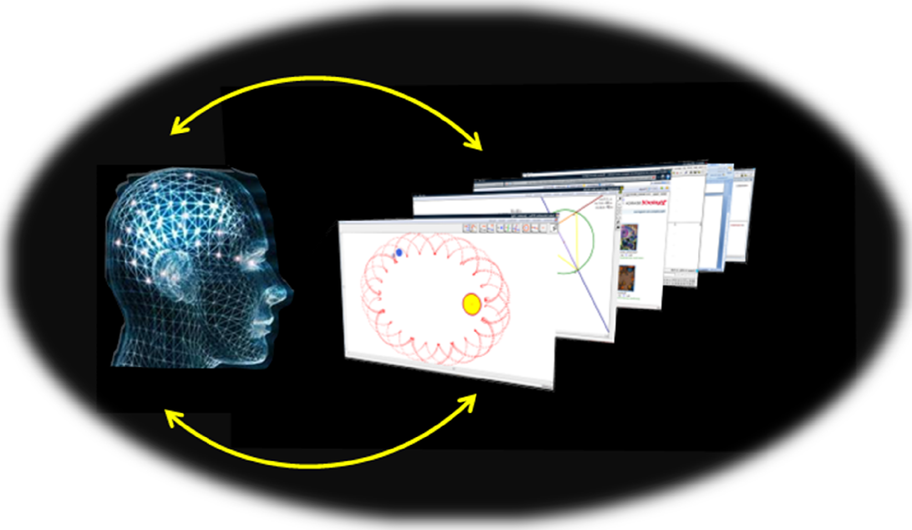


**Ilustración 1. Un ambiente de matemáticas dinámicas, se puede definir como un ambiente digital mediador entre la persona y el símbolo matemático**

Se pretende describir aquellos procesos de pensamiento que ocurren en los profesores, cuando se utilizan recursos tecnológicos de vanguardia (Internet y geometría dinámica) como herramientas en tareas relacionadas con la resolución de problemas donde se involucra el concepto de variación. Centraremos la observación en las expresiones escritas que los profesores aporten como evidencia de los procesos mentales que siguen en la resolución de problemas geométricos.

Así, se sitúa la investigación en dos aspectos esenciales:

- Cómo la cognición matemática depende esencialmente de los sistemas de representación utilizados.
- Cuáles son las diferencias entre las representaciones digitales con las representaciones estáticas.

## Preguntas de investigación

Los objetivos de este estudio son:

- Documentar la manera en que los profesores modifican sus nociones de variación en problemas geométricos.
- Clasificar las estrategias cognitivas utilizadas por los profesores en la resolución de problemas que involucran estas nociones.
- Desarrollar espacios de reflexión donde los profesores puedan confrontar sus ideas previas sobre las nociones de variación, con los resultados obtenidos en el trabajo en línea al resolver cada uno de los problemas propuestos.

En esta directriz, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las características que presentan los profesores en la solución de problemas que involucran ideas relacionadas a la variación?
- ¿El uso de tecnología reorganiza el desarrollo conceptual de los profesores?
- ¿Qué tipo de estrategias utilizan los profesores durante el proceso de solución de problemas que involucran estas nociones?
- ¿Cuáles son las dificultades a las que se enfrentan los profesores con mayor frecuencia?

# REVISIÓN DE LITERATURA

## La cognición y la cultura

Hércules Poirot, el popular detective de Agatha Christie, es un ejemplo de pensamiento lógico. Cómodamente en su sofá puede resolver el caso más intrincado de asesinato con la pura razón. Él tiene mucho cuidado para no permitir que las emociones se mezclen con su razonamiento, por lo que impresiona a todo mundo con la utilización de sus *células grises*. Sin embargo, Mr. Poirot, solo vive en el ámbito de la literatura, pero sin lugar a dudas representa un modelo de una concepción racionalista de mente.

En la historia de la filosofía predomina con diversas versiones, la concepción racionalista de la mente. Por ejemplo, a finales del siglo XVII, Descartes y Leibniz se adelantaron a la visión de una mente del pensamiento gobernada exclusivamente por las reglas de la lógica. La lógica era el camino real a la verdad.

Por otro lado, El Empirismo de David Hume, defendió que las ideas son impresiones que nosotros recibimos de los objetos externos. Es famosa la frase: *Nada está en el intelecto que previamente no estaba en los sentidos*.

Uno de los más grandes filósofos de la tradición occidental, KANT intentó conciliar éstas tradiciones concediendo un lugar a cada uno durante el proceso de adquisición del conocimiento. Kant propuso que el conocimiento empieza con impresiones sensoriales que se transforman por la estructura cognoscitiva.
Las estructuras cognoscitivas *a-priori*, necesitan la "comida" proporcionada por los sentidos para desarrollar el conocimiento. Intentando seguir un camino equidistante del Empirismo y Racionalismo, Kant tenía que proponer la estructura cognoscitiva como la causalidad, la lógica (formal), el tiempo y el espacio (Euclidiano), como “formas de sensibilidad" que transforman la llegada material cruda de los sentidos.

Jean Piaget estaba deseoso de contestar con su Epistemología Genética, al enigma creado por Kant, en cuanto al origen de esta estructura. Piaget propuso una continuidad de la materia sensorial a la mental.

La nueva Epistemología Piagetiana proporcionó un soporte genético a la concepción Kantiana. Más aún, la nueva Epistemología pudo concebir una trayectoria evolutiva (del Empirismo al Racionalismo) acorde con la teoría del origen de las especies de Carlos Darwin.

**Una aproximación diferente**

Se puede tomar un riesgo y afirmar que la concepción anterior de hombre lo concibió como una entidad cuya naturaleza era independiente del ambiente, sin embargo, el ambiente humano nunca es un mundo de pre-cultura, ni de pre-semiótica; pues el ser humano piensa con los símbolos. En consecuencia, nuestra lógica, nuestra racionalidad, no es independiente de nuestro idioma y el sistema semiótico que habitan constituye nuestro espacio social.

Es aquí donde subyace una idea profunda: ***el mundo sociocultural***. En la que se sostiene que toda nuestra actividad cognoscitiva tiene lugar dentro de un ambiente cultural: la sociedad.

En la vida de una persona, el objeto y las situaciones dónde se encuentran esos objetos, son generados por su ambiente social. Esta idea puede expresarse en términos más precisos: es el origen social de la cognición humana.

La cognición humana se caracteriza por las “funciones mentales superiores”. Por ejemplo, la memoria lógica, la atención voluntaria, el desarrollo de la voluntad, la formación de conceptos, son funciones exclusivamente humanas.
Otro tema básico de la aproximación sociocultural a la mente, es la tesis:

*La cognición humana es mediada por las herramientas y los signos.* Al respecto, Geertz es muy claro al expresar que el cerebro humano depende directamente de los recursos culturales para su buen funcionamiento. (Geertz, 1992)

Así en lugar de seguir un camino "natural", la cognición humana se desarrolla en principio, en consonancia con los recursos culturales encontrados en el ambiente. El papel de estos recursos culturales es esencialmente, un papel de mediación.

La cultura proporciona las herramientas materiales así como las herramientas simbólicas como mediadores. El idioma es el principal medio simbólico pero no el único. Muchos otros, de hecho, todos los recursos semióticos a la disposición del ser humano son parte, una parte integral, del funcionar de la cognición humana.

Las representaciones semióticas juegan un papel importante en nuestro pensamiento, tan profundamente que se puede decir que el pensamiento es semiótico. Es decir, nuestra mente es simultáneamente sensorial y semiótico/racional.

Hay una interacción bidireccional entre los seres humanos y el ambiente, y un ajuste mutuo dentro de un equilibrio dinámico. En este sentido, la geometría dinámica no es una herramienta: es un ambiente.

Vygotsky distingue entre la línea de desarrollo natural y la línea de desarrollo social o cultural; la primera, afirma, produce funciones con formas primarias y la segunda transforma los procesos elementales en procesos superiores (Wertsch, 1985). Para distinguir entre las funciones psicológicas elementales y superiores, menciona cuatro criterios principales:

1. El paso del control del entorno al individuo, es decir, la emergencia de la regulación voluntaria.
2. El surgimiento de la realización consciente de los procesos psicológicos.
3. Los orígenes sociales y la naturaleza social de las funciones psicológicas superiores.
4. El uso de signos como mediadores de las funciones psicológicas superiores.

En sus estudios sobre el desarrollo de las funciones mentales superiores, Vygotsky refiere que el desarrollo del habla sigue el mismo curso, y obedece a las mismas leyes, que el desarrollo de todas las demás operaciones mentales que implican el uso de signos, tales como contar o memorizar mnemotécnicamente (Vygotsky,1986). De esta forma, sitúa el desarrollo de las funciones mentales en cuatro etapas diferenciables:

1. Estadío primitivo o natural: Habla pre intelectual y pensamiento pre verbal
2. Estadío de Psicología ingenua: Uso correcto de las formas y estructuras gramaticales
3. Estadío de los signos externos, las operaciones externas, que le sirven de ayuda en la resolución de problemas internos
4. Estadío de Crecimiento externo: Usa la memoria lógica, opera con relaciones internas y signos internos.

Vygotsky concebía también a la **internalización** como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno. (Wertsch, 1985). Con estos conceptos fundamenta lo que denominó zona de desarrollo próximo y que, junto a la premisa de que los significados de las palabras evolucionan (Vygotsky, 1986), constituyen las aportaciones teóricas más relevantes de la construcción social del conocimiento.

**La zona de desarrollo próximo**

Vygotsky definió la zona de Desarrollo Próximo como la distancia entre "el nivel de desarrollo real del niño tal como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas" y el nivel más elevado de "desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados" (Wertsch, 1985). De esta manera, sostenía que la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo. Entonces, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración.

## La cognición y los instrumentos de mediación.

Vygotsky considera a la memoria, el lenguaje y la conciencia, como funciones mentales superiores que sólo pueden ser desarrollados a través de los sistemas semióticos de representación como la escritura y la oralidad, principalmente. Estos sistemas hacen posible la duplicación interna del mundo y de la comunicación, pues permiten organizar, regular y finalmente expresar el pensamiento.

Los sistemas semióticos son, *verdaderos instrumentos de la construcción psicológicos que tienen, en el tratamiento del conocimiento, un papel análogo al de las herramientas técnicas en la manipulación del mundo físico* (Moreno & Waldegg, 2004).

Duval (1999) puntualiza que las actividades cognitivas fundamentales son, entre otras, la conceptualización, el razonamiento, la aprehensión de figuras y la resolución de problemas.

Resulta interesante relacionar estas aseveraciones, con uno de los conceptos fundamentales en teoría cognitiva que ha tomado relevancia trascendente en investigaciones contemporáneas: la ***acción mediada*** (Wertsch, 1993), donde se sostiene al individuo como el agente y responsable de sus acciones, y además, donde la eficacia y resultado de la misma depende de los instrumentos elegidos y de la destreza en su dominio.

La acción humana, en este contexto, emplea "instrumentos mediadores" tales como las herramientas o el lenguaje. Estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial (Wertsch, 1993). Esto implica que *el objeto de la observación cambia cuando cambia el instrumento mediador y, en consecuencia, el conocimiento producido.* (Moreno, 2002)

Existe una gran diversidad de instrumentos mediadores disponibles para los seres humanos (Wertsch, 1993), entre ellas merecen especial atención las herramientas psicológicas: el lenguaje, los diversos sistemas de cálculo, las técnicas mnemotécnicas, los sistemas algebraicos de símbolos, las obras de arte, la escritura, los esquemas, los mapas, el dibujo lineal, toda clase de signos convencionales, …

En este punto, es necesario enfatizar un aspecto de suma importancia: resulta erróneo cualquier tendencia a centrarse exclusivamente en la acción, en las personas o en los instrumentos mediadores aisladamente (Wertsch, 1993)

Por otra parte, se hace necesario abordar el papel de la conceptualización. En este terreno Vygotsky (1986, p 119) concluye:

> *Los experimentos de Ach demostraron que la formación de conceptos es un proceso creativo, no mecánico ni pasivo; que un concepto surge y toma forma en el curso de una operación compleja encaminada a la solución de un problema; y que la mera presencia de condiciones externas favorables a una vinculación mecánica de la palabra y el objeto no basta para producir un concepto. En su opinión, el factor decisivo en la formación de conceptos es la llamada "tendencia determinante"*

Esto le lleva a determinar que nunca se forma un concepto nuevo sin que medie el efecto regulador de la tendencia determinante creada por la tarea experimental. (Vygotsky, 1986). Esta afirmación sustenta que el desarrollo de los procesos que al final acaban formando conceptos, comienzan en edades tempranas, pero las funciones intelectuales que, en una combinación específica, constituyen la base psicológica del proceso de la formación de conceptos solo maduran al llegar la pubertad.

## Mediación Instrumental

Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico. Esta aseveración hecha por las teorías cognitivas contemporáneas, han tenido mucho impacto en el ámbito educativo y recibe el nombre de ***principio de mediación instrumental*** y, al respecto Moreno & Waldegg (2002) escriben:

> *En el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado*

*lugar en el desarrollo de las matemáticas (Duval, 1998). El proceso de articulación entre el concepto matemático (el .objeto. matemático) y sus representaciones es un proceso de mutua constitución. Podría decirse que la evolución de los sistemas semióticos de representación, en el caso de las matemáticas, han pasado por diversas etapas entre las cuales vale la pena señalar la siguiente: la separación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas. Hay entonces una predominancia de las representaciones semióticas en cuanto a las relaciones con el objeto. Por ejemplo, enfrentados al estudio de las rectas tangentes, los matemáticos del siglo* XVII *tuvieron que abandonar la idea de la recta tangente como ese objeto ideal que sólo toca en un punto a la curva ante los ejemplos de puntos de inflexión en los cuales la tangente atraviesa a la curva. Hubo que tomar una decisión entre el objeto mental (ideal) y lo que las representaciones algebraicas imponían como necesario. Otro momento significativo en el desarrollo de los sistemas de representación matemáticos, se da cuando se logra trabajar con las representaciones como si fueran el objeto. La manera de trabajar con los números reales mediante su sistema de representación decimal, es un ejemplo paradigmático de esta etapa. Los sistemas de representación no cumplen tan solo una función de comunicación sino que también ofrecen un medio para el tratamiento de la información y son fuente de generación de significados.*

A su vez, James Wertsch, en su libro *Voces de la mente*, es claro al especificar que la acción humana emplea "instrumentos mediadores" tales como las herramientas o el lenguaje y éstos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial. (Wertsch, 1993).

Vivimos inmersos en un mundo sociocultural que es resultado de la consolidación de los sistemas de representación asociados a la visualización y la escritura. (Moreno, 2002). En este sentido, resulta indispensable buscar alternativas que propicien mejores resultados en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos que están involucrados en el currículo del sistema educativo. Pues el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar. (Moreno & Waldegg, 2002).

En educación matemática, cada vez requiere mayor atención una premisa: no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. (Duval, 1999).

Las herramientas que usan un soporte informático, como la computadora o las calculadoras graficadoras, han modificado la naturaleza de las exploraciones en las representaciones de un objeto matemático. Actualmente, las calculadoras algebraicas como la TI 92, adquieren el papel de sistemas de representación que hacen más perceptible y novedosas, las características de los objetos matemáticos y que vienen a ser un soporte adecuado en la tarea de pasar de una a otra representación de un mismo objeto matemático.

Las calculadoras graficadoras son sistemas ejecutables de representación que anteriormente eran privativas de los seres humanos. Ejemplo de ello es el poder de graficación de funciones, proceso que el estudiante ve desplegándose en la pantalla sin su intervención directa, lo que obliga al estudiante a replantear su papel como tal al enfrentarlo a la interpretación matemática, por ejemplo, de los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla. (Moreno & Waldegg, 2002)

Cuando un estudiante se auxilia de una calculadora para realizar ciertos cálculos en un problema cuya solución ya ha encontrado, esa calculadora puede interpretarse como un auxiliar de su cognición (Moreno, 2003). Es pues, una herramienta mediadora.

La expectativa que ha generado la popularización de la tecnología en el contexto educativo, lleva a nuevos planteamientos y reformulaciones como el hecho de que es innegable que *la sinergia*[1] *que produce entonces ponerse en marcha, capacitaría al estudiante para trabajar en un nivel de complejidad matemática que puede ser totalmente inalcanzable sin dicha tecnología (*Moreno, 2003).

[1] Definido por la Real Academia como la acción de dos o más causas cuyo efecto es superior a la suma de los efectos individuales.

Visto en perspectiva de mayor alcance, es factible visualizar las características de una educación estrechamente vinculada con la tecnología de la información y la comunicación:

- El desarrollo de las redes de información genera mayor densidad del conocimiento que se introduce en una sociedad. (Moreno, 2003)
- El estudiante establecido en sociedad cognitiva con instrumentos de índole informático. (Moreno & Waldegg, 2002).
- Se ofrecería al usuario[2] los medios para aprender la información deseada llegando a ella por su propio camino. (Burke & Ornstein, 2001)

[2] El usuario, entendido como el individuo que busca el conocimiento y que hace el rol de estudiante.

# METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

## Naturaleza de la investigación

Para la descripción de los procesos cognitivos que siguen los estudiantes cuando existe mediación instrumental, es necesario recurrir a la investigación de corte cualitativo. De este modo se pretende observar de manera cuidadosa características básicas de los profesores y las interacciones que logran establecer con el medio (como individuos y como grupo de trabajo). De ahí la importancia de utilizar el estudio de casos como instrumento experimental, puesto que la información recopilada representa situaciones más típicas que se presentan en ambientes similares de aprendizaje.

## Los sujetos de estudio

Los sujetos que hicieron valiosas aportaciones al estudio, fueron profesores y estudiantes de matemáticas de países Iberoamericanos que participaron en el V Congreso Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas efectuado del 7 al 21 de octubre de 2007. (Tabla 1)

| PAÍS | PARTICIPANTES | PROCEDENCIA |
|---|---|---|
| **Argentina** | 4 | ▪ Universidad Nacional de la Pampa<br>▪ ENS No 45<br>▪ Escuela Normal Superior No. 37 |
| **Chile** | 1 | ▪ Liceo No. 7 de Niñas de Providencia |
| **Ecuador** | 2 | ▪ Universidad Técnica Particular de Loja<br>▪ Escuela “Rafael Chico Peña Herrera” |
| **El Salvador** | 2 | ▪ Instituto Nal. Cornelio Azenón. Instituto Nacional del Congo |
| **España** | 1 | ▪ “Profesora de Educación Primaria” |
| **México** | 16 | ▪ Universidad de Guadalajara<br>▪ Instituto Vancouver<br>▪ CBTIS No. 75<br>▪ Universidad Veracruzana<br>▪ Universidad de Querétaro<br>▪ Tecnológico de Monterrey<br>▪ ENP<br>▪ Universidad Autónoma de Nayarit<br>▪ Escuela Secundaria Oficial 092 |

| | | |
|---|---|---|
| | | ▪ USEBEQ-UAQ<br>▪ Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho”<br>▪ Colegio México<br>▪ Instituto Veracruzano de Educación para los Adultos |
| **Perú** | 3 | ▪ Colegio “Cristo Rey” Jesuitas<br>▪ Universidad Católica de Perú<br>▪ Colegio Domingo Sarmiento |
| **Uruguay** | 3 | ▪ Instituto de Profesores Artigas<br>▪ Instituto de Formación Docente |
| **Venezuela** | 1 | ▪ Instituto Universitario de Tecnología del Estado Bolívar |

Tabla 1: Profesores participantes en el V CIVEM

Los sujetos participantes, fueron aceptados en el taller ***Secuencias didácticas con software gratuito***[3] que se ofreció en el marco del V congreso.

Aunque refieren distinta formación académica, su participación no estaba condicionada a ello, pues se explorarían contenidos generales de matemáticas que podían ser abordados con ayuda de Tecnología.

### Fases de la investigación

En las fases de la investigación se distinguen puntos centrales que guiaron el estudio. Primeramente, el diseño de las actividades y los problemas matemáticos a plantear; en un segundo momento, se abordaría con los 33 participantes iniciales, una serie de actividades donde se explorarían sus habilidades en el uso de los recursos tecnológicos. De éstos se seleccionarían a cuatro participantes para el estudio de casos, en una tercera fase, donde se les plantearían los dos problemas matemáticos que se describirán más adelante. La selección de los profesores se determinó tomando como criterio su propuesta de solución al problema de las cuatro secciones, considerada como opcional, con la salvedad de que ésta fuera utilizando solo lápiz y papel.

Los instrumentos que permitirán recoger las evidencias necesarias para iniciar un análisis bajo los objetivos de la investigación, son principalmente, los

[3] Anexo A

correos electrónicos, las expresiones escritas por los profesores en la plataforma Wexone y los archivos ***.FIG*** del software Cabri Géomètre y ***.gsp*** del software The Geometer's Skechtpad.

## *Diseño de las actividades*

En esta fase se estructuraron las actividades y los instrumentos con que se recolectaron los datos. Para ello, fue necesario primero, una selección de los problemas a los que se enfrentarían los profesores y segundo, la selección de cuatro de ellos con los que se llevaría a cabo el estudio de casos.

Los criterios de selección de los problemas comprendieron:

- Que abordasen contenidos que implicaran el estudio de la variación.
- En la solución del problema debería estar involucrados, por lo menos, características del quehacer matemático como: conjeturar, extender la solución del problema, tener múltiples representaciones, estudio de casos particulares y construcción de modelos matemáticos.
- Respondieran a un contexto matemático.

Esta selección debería permitir describir los contenidos involucrados en la solución, los procesos del pensamiento matemático que se ponen en juego y las posibles dificultades a la que se enfrentarían los participantes al intentar resolverlos

Los problemas seleccionados para el estudio de casos, son **El triángulo en el círculo** y **El problema de las cuatro secciones**.

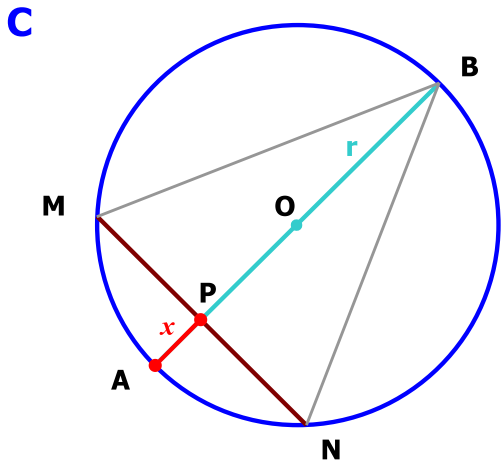
El primero de ellos es reportado en trabajos de investigación (Santillán 2002), y el segundo fue diseñado para los fines exclusivos de este trabajo de investigación y es producto de una evolución natural de las condiciones iniciales a través de la experiencia personal rescatada de talleres presenciales donde se abordaron ideas similares. En él, se plantea un problema cuya esencia es la misma idea de variación pero con una estructura cuya resolución, en apariencia, no tuviera mayor dificultad.

(1) **El triángulo en el círculo**

Sea C una circunferencia de centro O y radio r. Sea P un punto cualquiera del diámetro AB, desde donde se traza una cuerda MN perpendicular a dicho diámetro.

Sea x la distancia AP

*Calcula el valor de **x** (en términos de **r**), para que el triángulo MBN tenga el área máxima.*




**Solución algebraica**

Sea $a$ la longitud de la cuerda MN. Entonces, el área **A** del triángulo MBN es una función de la forma:

$$A(x) = \frac{a(2r-x)}{2}$$

Con $0 \leq x \leq 2r$

Por el Teorema de Pitágoras, $PN^2 = ON^2 - OP^2$

Es decir, $PN^2 = r^2 - (r-x)^2$

$$PN^2 = r^2 - (r^2 - 2rx + x^2)$$

$$PN^2 = r^2 - r^2 + 2rx - x^2$$

$$PN^2 = 2rx - x^2$$

$$PN = \sqrt{2rx - x^2}$$

Como MN = 2 PN,

La función $A(x)$, puede expresarse como:

$$A(x) = \frac{2(\sqrt{2rx - x^2})(2r-x)}{2}$$

$A(x) = (\sqrt{2rx - x^2})(2r - x)$

$\boldsymbol{A(x) = (2r - x)\sqrt{x(2r - x)}}$

Para maximizar la función, derivamos con respecto a x:

$$A'(x) = \frac{1}{2}(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}(2r - 2x)(2r - x) + \left(\sqrt{2rx - x^2}\right)(-1)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2rx - x^2}}(2r - 2x)(2r - x) - \left(\sqrt{2rx - x^2}\right)$$

$$A'(x) = \frac{(2r - 2x)(2r - x)}{2\sqrt{2rx - x^2}} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$A'(x) = \frac{(2r - 2x)(2r - x) - 2(2rx - x^2)}{2\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{2(r - x)(2r - x) - 2(2rx - x^2)}{2\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{2\left((r - x)(2r - x) - (2rx - x^2)\right)}{2\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{(r - x)(2r - x) - (2rx - x^2)}{\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{(r - x)(2r - x) - x(2r - x)}{\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$\boldsymbol{A'(x) = \frac{(2r - x)(r - 2x)}{\sqrt{x(2r - x)}}}$$

Los puntos críticos están dados por:

$A'(x) = 0$

Es decir, cuando

$x = 2r$, o bien, cuando $x = \frac{r}{2}$

Como P es un punto cualquiera del diámetro AB, ambas raíces cumplen la primera restricción. Sin embargo, cuando P coincide con los extremos, y en particular cuando P coincide con B, x= 2r, en donde no existe el triángulo MBN, por lo que se descarta esta raíz.

Por lo tanto, en $x = \frac{r}{2}$, se tiene un valor máximo de la función, pues se puede comprobar entre otros criterios que $A''(\frac{r}{2})$<0, y que

$$A(\tfrac{r}{2}) = \left(\sqrt{2r(\tfrac{r}{2}) - \left(\tfrac{r}{2}\right)^2}\right)(2r - \tfrac{r}{2})$$

$$A(\tfrac{r}{2}) = \left(\sqrt{r^2 - \tfrac{r^2}{4}}\right)\left(\tfrac{3r}{2}\right)$$

$$A(\tfrac{r}{2}) = \left(\sqrt{\tfrac{3r^2}{4}}\right)\left(\tfrac{3r}{2}\right)$$

$$A(\tfrac{r}{2}) = \left(\tfrac{\sqrt{3}r}{2}\right)\left(\tfrac{3r}{2}\right)$$

$$A(\tfrac{r}{2}) = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}\, r^2$$

**Versión dinámica del problema, utilizando el software Cabri Géomètre:**

La versión dinámica del problema, implica una construcción que se detalla en la figura 2, y que permite una visualización del comportamiento del problema:

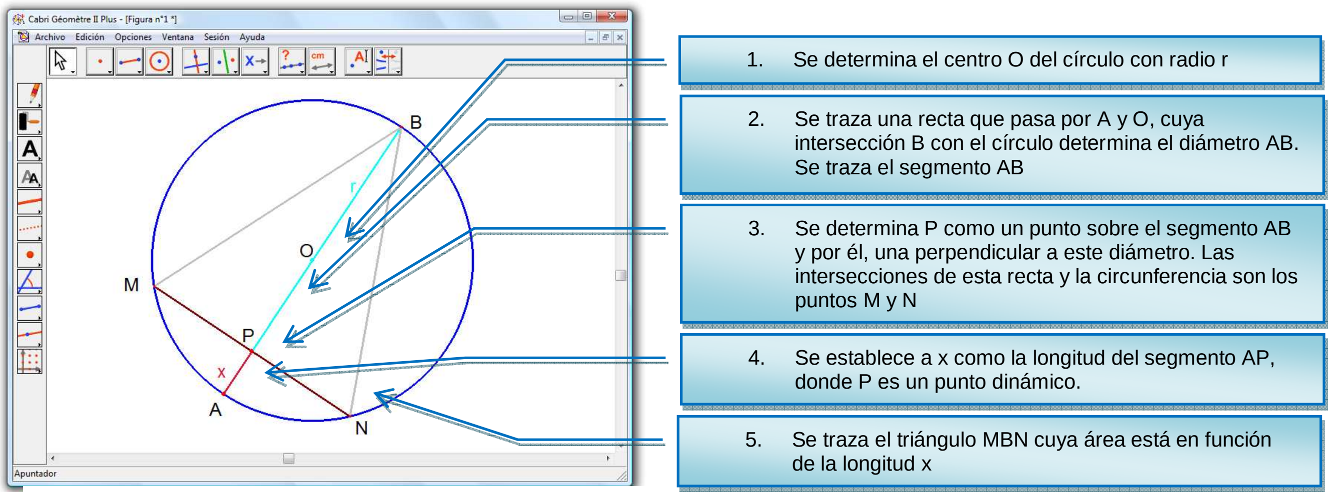



**Ilustración 2. Construcción geométrica de la versión dinámica del problema del triángulo en el círculo.**

El área del triángulo MBN está en función de la longitud x del segmento AP, por lo que se puede representar gráficamente esta relación funcional transfiriendo las longitudes involucradas utilizando los ejes que proporciona el software.

Esta relación, puede visualizarse dando Traza al punto cuyas coordenadas son (x,A(x)), donde A(x) es el área del triángulo MBN para una longitud x determinada del segmento AP (Ilustración 3)

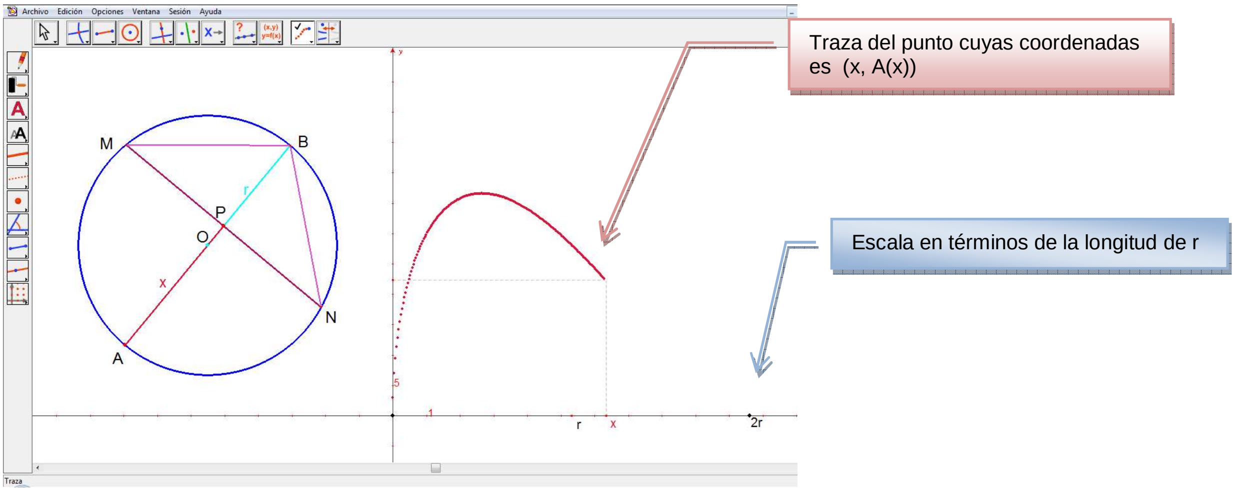



**Ilustración 3.**

Se puede optar, también, por solicitar al software, que muestre el lugar geométrico del punto (x, A(x)), cuando se desplaza el punto P (Ilustración 4)

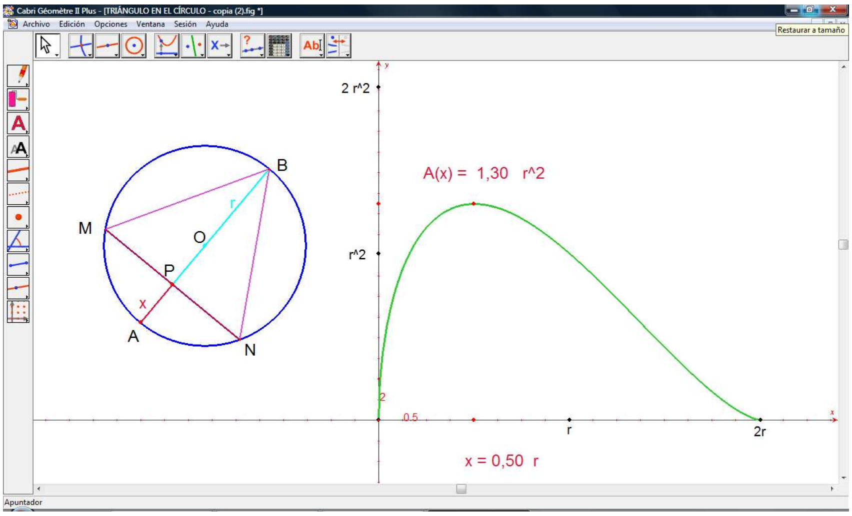



**Ilustración 4**

La escala que muestra la figura está en términos de r, por lo que se puede mostrar que cuando x=0.50 r, se alcanza el máximo del área del triángulo que corresponde a A(x)= 1.30 $r^2$

(2) **El problema de las cuatro secciones**

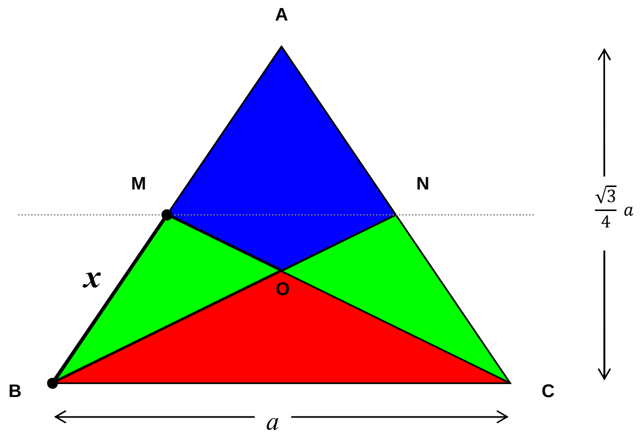
Sea ABC un triángulo equilátero.

Se marca un punto M sobre AB y se traza una paralela a BC que pasa por M. La intersección de esta paralela con AC la llamaremos N.

Se traza el segmento BN y el segmento CM, cuya intersección es O.

El triángulo ABC ha quedado dividido en cuatro secciones: BOM, MONA, NOC y BOC.

A la distancia entre B y M la llamaremos x.




Como M es arbitrario, las áreas de las cuatro secciones dependen de x. *Encuentre el valor de x donde las cuatro secciones tienen la misma área.* A continuación, se presenta una posible solución algebraica basada en las relaciones funcionales que se establecen entre la longitud de x y las áreas que se determinan en las secciones descritas.

**Solución algebraica**

Trazos auxiliares:

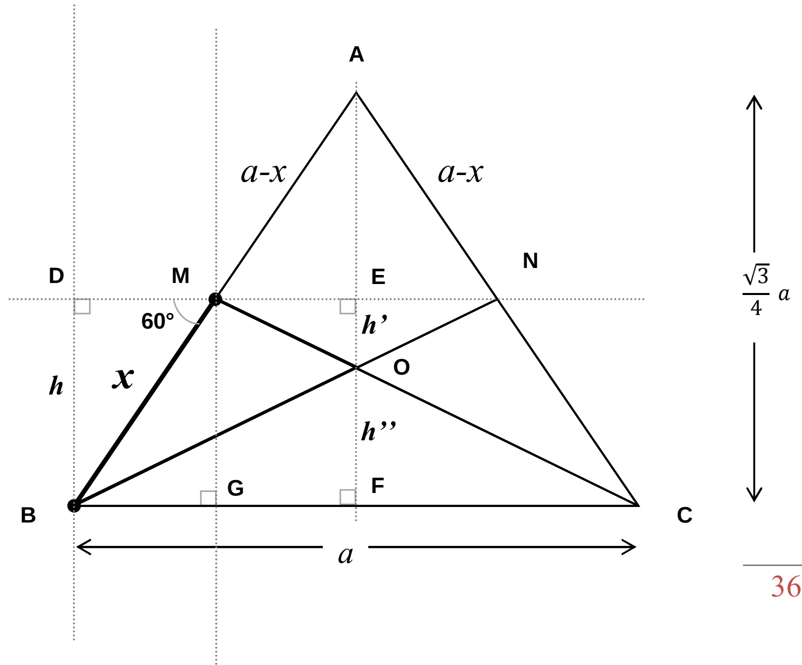
Sea

$\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{MG} \parallel \overleftrightarrow{AF}$

Con

$\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Sean $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h'}$ y $\boldsymbol{h''}$ las longitudes de los segmentos DB, EO y OF, respectivamente.



Entonces:

$$h = x\ sen60°$$

$$h = x\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Por otra parte, los triángulos MGC y OFC son semejantes, por lo que

$$\frac{h''}{\frac{\sqrt{3}\,x}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{a-\frac{x}{2}}$$

$$h'' = \frac{\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)}{a-\frac{x}{2}}$$

$$h'' = \frac{\frac{a\sqrt{3}\,x}{4}}{\frac{2a-x}{2}}$$

$$h'' = \frac{2a\sqrt{3}\,x}{2(2(2a-x)}$$

$$h'' = \frac{a\sqrt{3}\,x}{2(2a-x)}$$

Finalmente,

$$h' = h - h''$$

$$h' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{a\sqrt{3}\,x}{2(2a-x)}$$

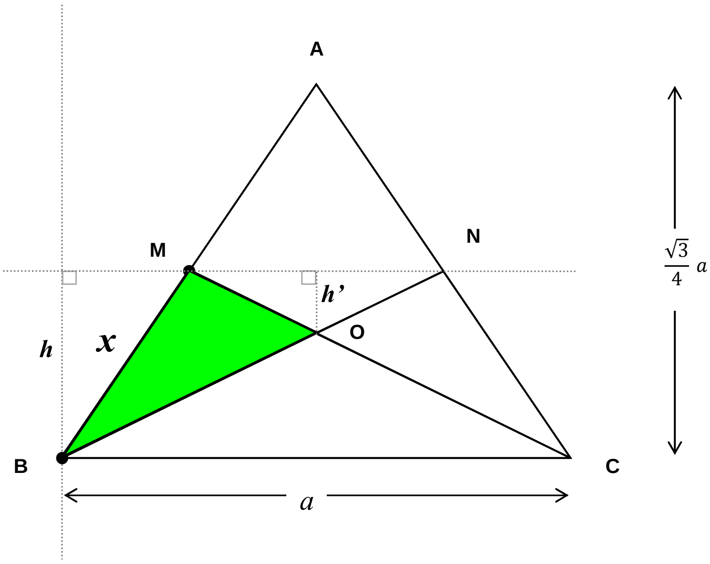
$$h' = \frac{\left(\sqrt{3}\,x\right)(2a-x) - a\sqrt{3}\,x}{2(2a-x)}$$

$$h' = \frac{\left(\sqrt{3}\,x\right)\left((2a-x) - a\right)}{2(2a-x)}$$

$$h' = \frac{\sqrt{3}\,x\,(a-x)}{2(2a-x)}$$

Es necesario notar que el triángulo AMN es equilátero, por lo que el lado MN tiene una longitud igual a $(a-x)$

**El área de la sección BMO**




El área del triángulo BMO, está determinada por la diferencia entre las áreas del triángulo BMN, cuya altura es $h$ y el triángulo MON, de altura $h'$; por lo que en términos de la longitud x, se tiene una relación funcional de la forma:

$$y_1 = \left(\frac{(a-x)(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}{2}\right) - \left(\frac{(a-x)\left(\frac{\sqrt{3}\,x\,(a-x)}{2(2a-x)}\right)}{2}\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{(a-x)(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}{2}\right)\left(1 - \frac{(a-x)}{(2a-x)}\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{(a-x)(\sqrt{3}x)}{4}\right)\left(\frac{(2a-x) - (a-x)}{(2a-x)}\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{(a-x)(\sqrt{3}x)}{4}\right)\left(\frac{a}{2a-x}\right)$$

$$y_1 = \frac{a(a-x)(\sqrt{3}x)}{4(2a-x)}$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$4(2a-x)y_1 = a(a-x)(\sqrt{3}x)$$

$$(8a-4x)y_1 = (a\sqrt{3}x)(a-x)$$

$$8ay_1 - 4xy_1 = a^2\sqrt{3}x - a\sqrt{3}x^2$$

$$a\sqrt{3}x^2 - 4xy_1 - a^2\sqrt{3}x + 8ay_1 = 0$$

$$\left(a\sqrt{3}\right)x^2 + (-4)\,xy_1 + (0){y_1}^2 + \left(-a^2\sqrt{3}\right)x + (8a)y_1 + (0) = 0$$

Que es una expresión en la forma general de una ecuación cuadrática. De esta ecuación el discriminante cumple que:

$$(-4)^2 - 4\left(a\sqrt{3}\right)(0) > 0$$

Por lo que esta expresión representa a una ***hipérbola*** cuyo eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados.

Sin embargo, no se debe perder de vista que $0 < x < a$ es una restricción fuerte en el contexto del problema inicial. También, se debe observar que el triángulo BMO es congruente con el triángulo CON, por lo que el área de esta sección guarda la misma relación funcional.

Usando el software Derive, se puede obtener la siguiente gráfica para $a = 1$ (Ilustración 5)

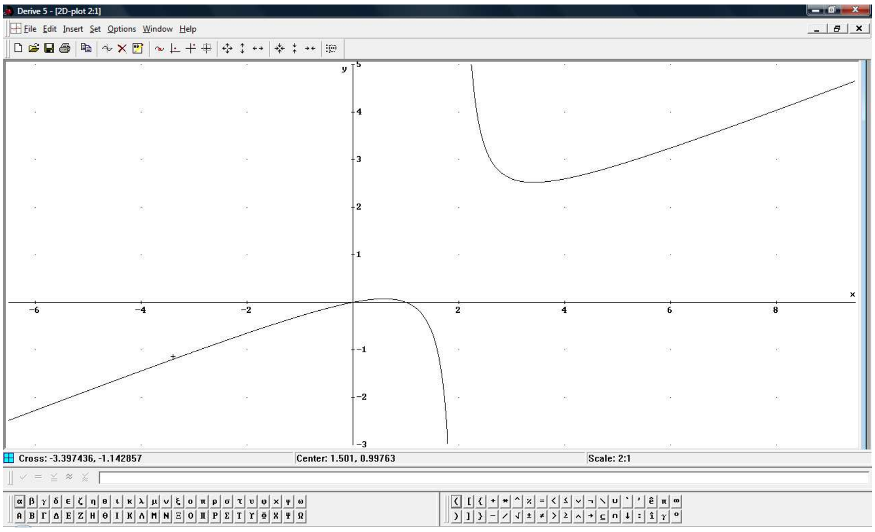
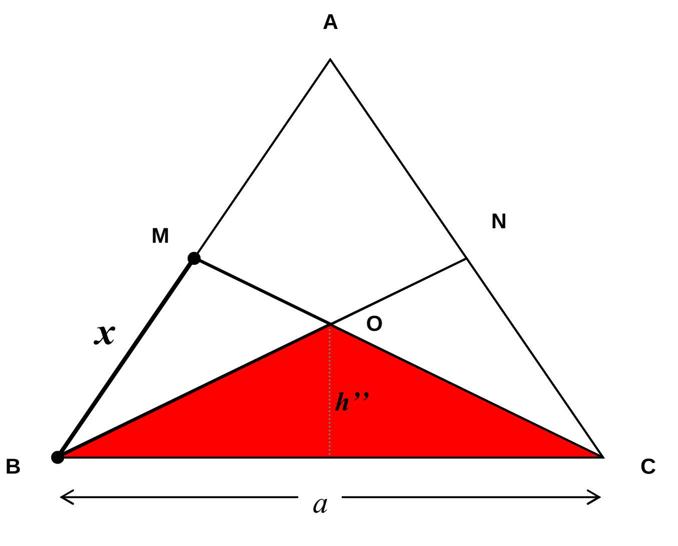


**Ilustración 5**

## El área de la sección BOC

El triángulo BOC tiene por altura a $h''$, por lo que su área está en relación funcional con x de la siguiente manera:




$$y_2 = \frac{ah''}{2}$$

$$y_2 = \frac{a\left(\frac{a\sqrt{3}\,x}{2(2a-x)}\right)}{2}$$

$$y_2 = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}\,x}{2(2a-x)}}{2}$$

$$y_2 = \frac{a^2\sqrt{3}\,x}{4(2a-x)}$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$4(2a-x)y_2 = a^2\sqrt{3}\,x$$

$$8ay_2 - 4xy_2 - a^2\sqrt{3}\,x = 0$$

$$-4xy_2 + a^2\sqrt{3}\,x + 8ay_2 = 0$$

$$(0)x^2 + (-4)xy_2 + (0){y_2}^2 + \left(a^2\sqrt{3}\right)x + (8a)y_2 + (0) = 0$$

El discriminante de esta ecuación cuadrática es

$$(-4)^2 - 4(0)(0) > 0$$

Por lo que esta expresión, como en el caso anterior, representa a una ***hipérbola*** cuyo eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados.

Una representación gráfica de este lugar geométrico se obtiene con Derive 5.0, y cuando $a = 1$ (Ilustración 6)

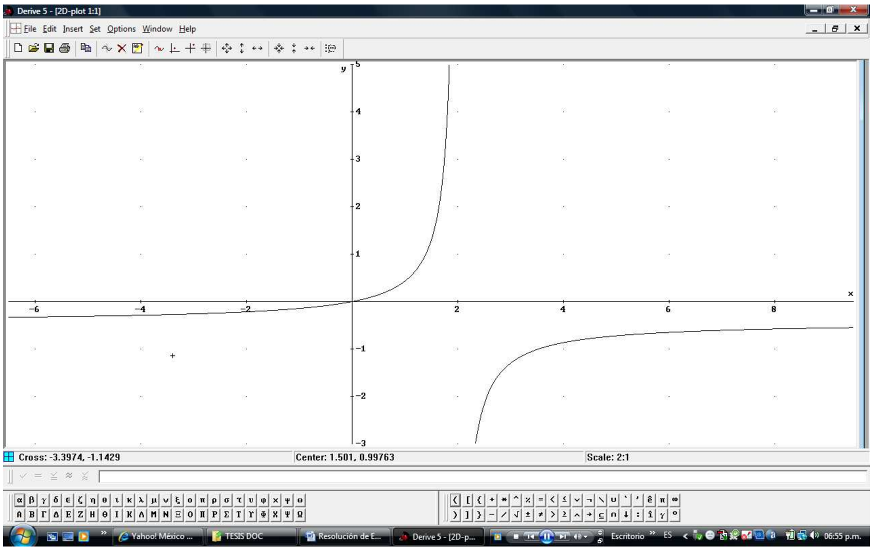
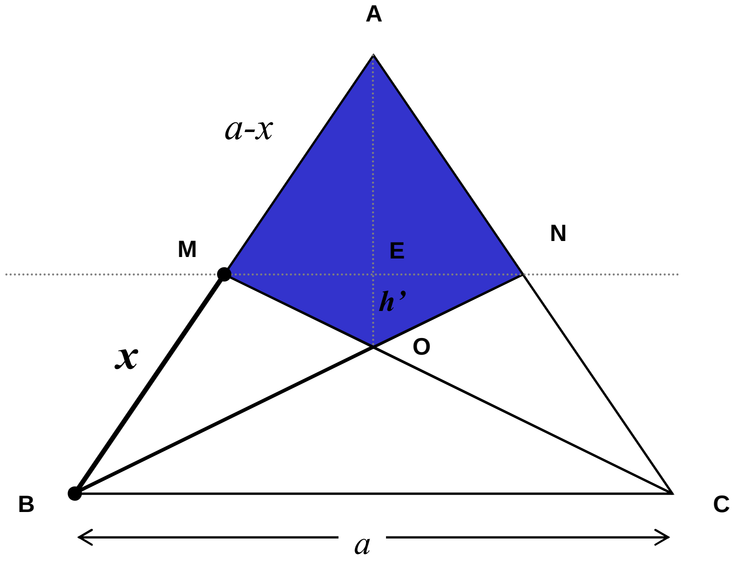



**Ilustración 6**

## El área de la sección MONA

El área del cuadrilátero MONA está determinada por la suma de las áreas de los triángulos MAN y MON, por lo que también está en relación funcional con x de la siguiente manera:




$$y_3 = \left(\frac{(a-x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)\right)}{2}\right) + \left(\frac{(a-x)\left(\frac{\sqrt{3}\,x\,(a-x)}{2(2a-x)}\right)}{2}\right)$$

$$y_3 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2}{2}\right) + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2\left(\frac{x}{(2a-x)}\right)}{2}\right)$$

$$y_3 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2a-x}\right)$$

$$y_3 = \left(\frac{\sqrt{3}(a-x)^2}{4}\right)\left(\frac{2a}{2a-x}\right)$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{3}\,a(a-x)^2}{2(2a-x)}$$

Expresión que puede escribirse como:

$$2(2a-x)y_3 = \sqrt{3}\,a(a-x)^2$$

$$4ay_3 - 2xy_3 = \sqrt{3}\,a(a^2 - 2ax + x^2)$$

$$4ay_3 - 2xy_3 = \sqrt{3}\,a^3 - 2\sqrt{3}a^2x + \sqrt{3}ax^2$$

$$\sqrt{3}ax^2 + 2xy_3 - 2\sqrt{3}a^2x - 4ay_3 + \sqrt{3}\,a^3 = 0$$

$$\left(\sqrt{3}a\right)x^2 + (2)xy_3 + (0)y_3{}^2 + \left(-2\sqrt{3}a^2\right)x + (-4a)y_3 + \left(\sqrt{3}\,a^3\right) = 0$$

Ecuación cuadrática cuyo discriminante es:

$(2)^2$ - 4 $(\sqrt{3}a)(0) > 0$

Por lo que esta expresión, como en los casos anteriores, representa nuevamente a una ***hipérbola*** cuyo eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados.

Una representación gráfica de esta hipérbola, cuando $a = 1$ se puede visualizar con Derive (Ilustración 7)

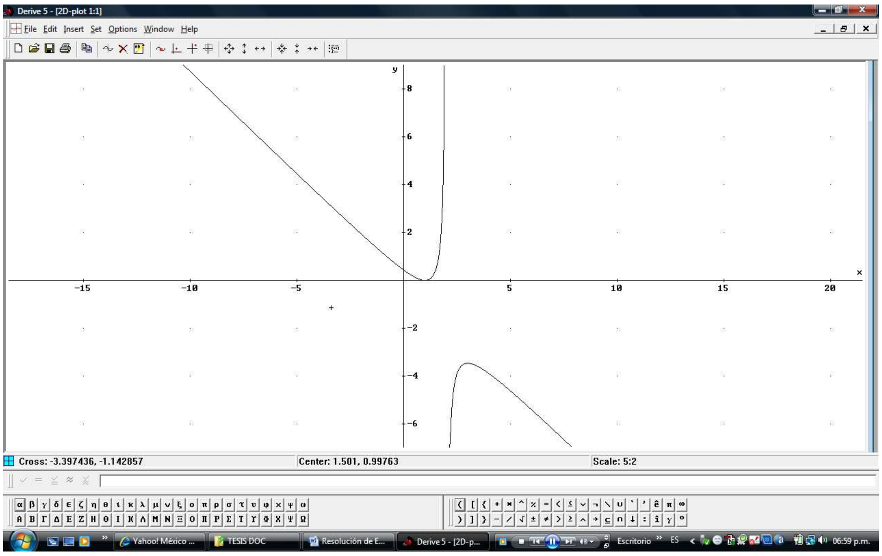



**Ilustración 7**

## Un sistema de hipérbolas

Las ecuaciones

$a\sqrt{3}x^2 - 4xy - a^2\sqrt{3}x + 8ay = 0$

$-4xy + a^2\sqrt{3}\,x + 8ay = 0$

$\sqrt{3}ax^2 + 2xy - 2\sqrt{3}a^2x - 4ay + \sqrt{3}\,a^3 = 0$

Forman un sistema de ecuaciones cuadráticas, y en particular un sistema de hipérbolas, que explican la imposibilidad de encontrar un valor para x de manera que las cuatro secciones tengan simultáneamente la misma área, pues con las dos primeras ecuaciones es posible obtener la ecuación:

$a\sqrt{3}x^2 + 2a^2\sqrt{3}x = 0$, cuyas raíces $x = 0$ $y$ $x = -2a$, escapan al dominio de los valores posibles de x en el contexto del problema planteado.

Gráficamente, se puede mostrar que no hay intersección entre los lugares geométricos que describen estas relaciones funcionales:

Usando el software Derive 5.0, se obtiene la siguiente gráficas para el sistema cuando $a = 1$ (Ilustración 8)

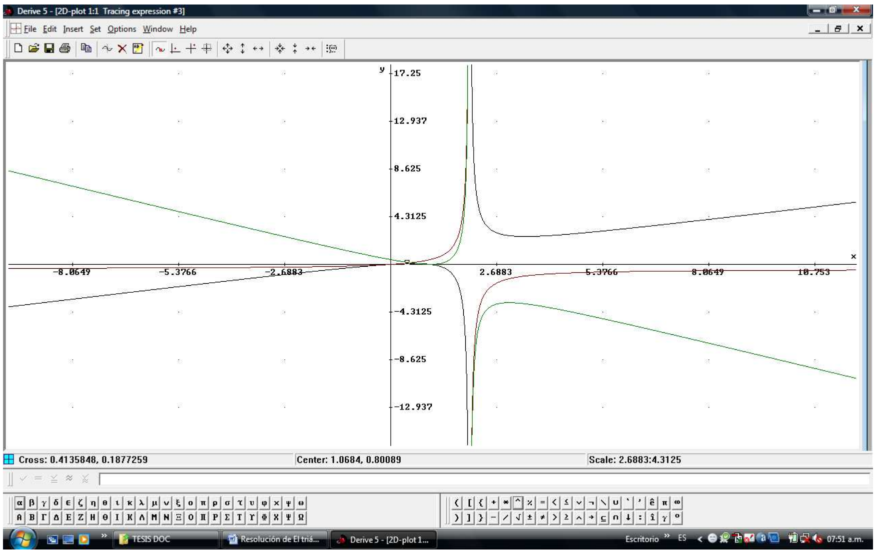


**Ilustración 8**

Un acercamiento a las gráficas cerca del dominio de x se muestra en la figurase muestra en la figura 9:

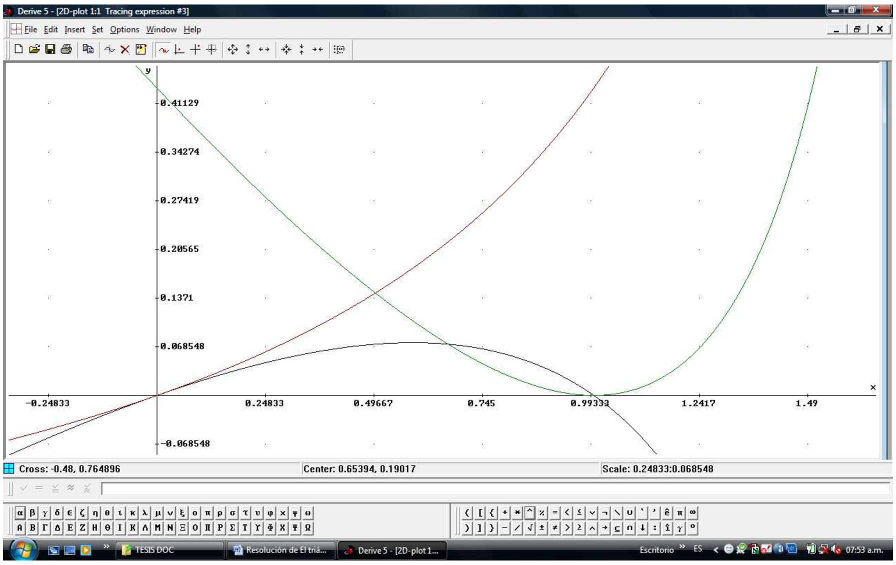


**Ilustración 9**

**Versión dinámica del problema, utilizando el software Cabri Géomètre:**

La construcción detallada del problema en su versión dinámica, se muestra en las ilustraciones 10, 11, 12 y 13.

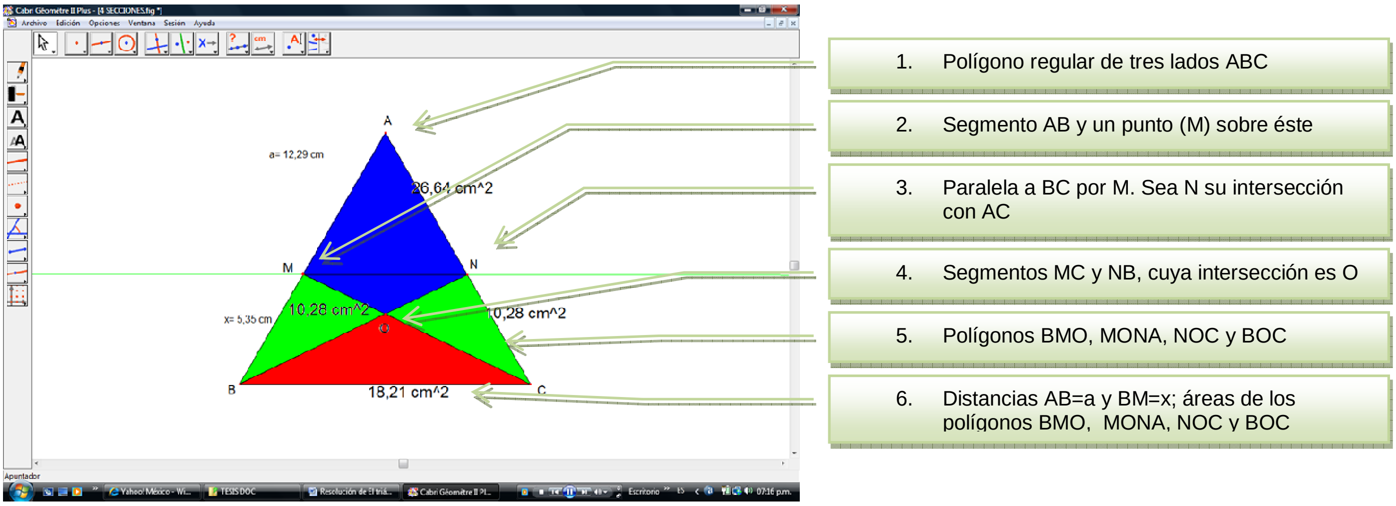



**Ilustración 10**

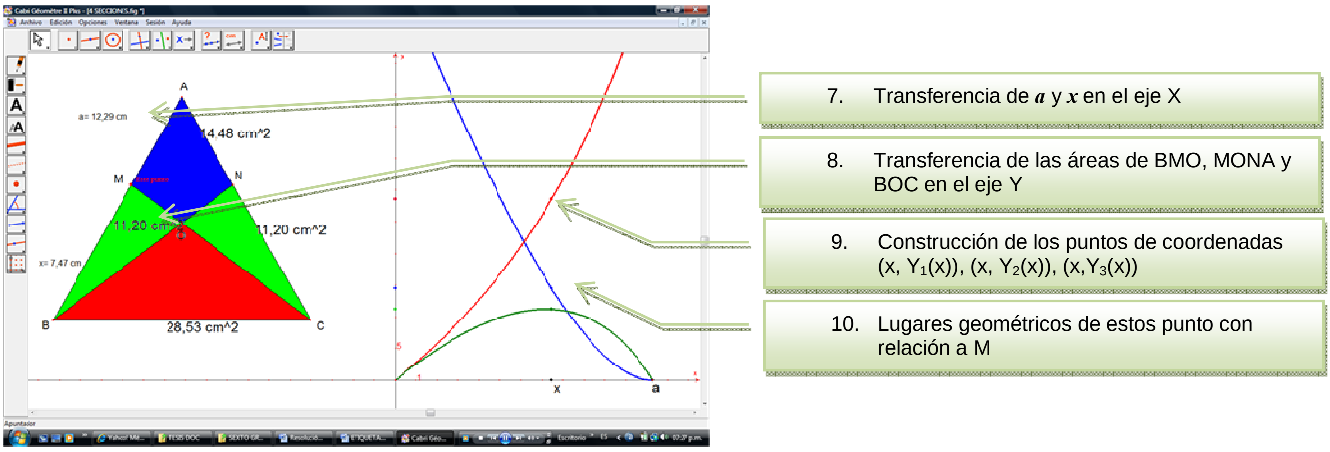
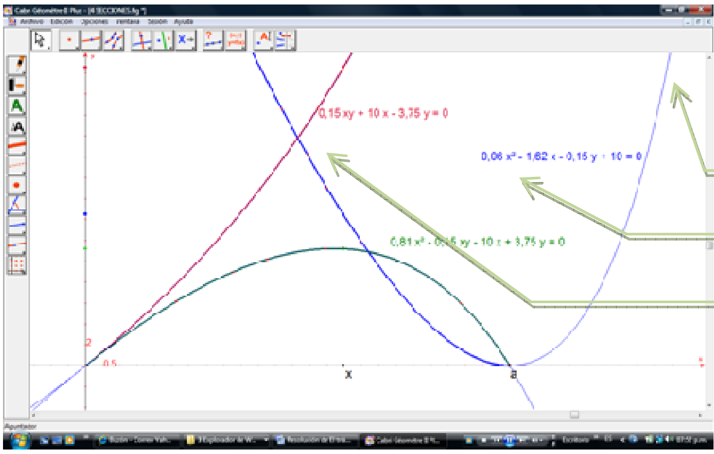
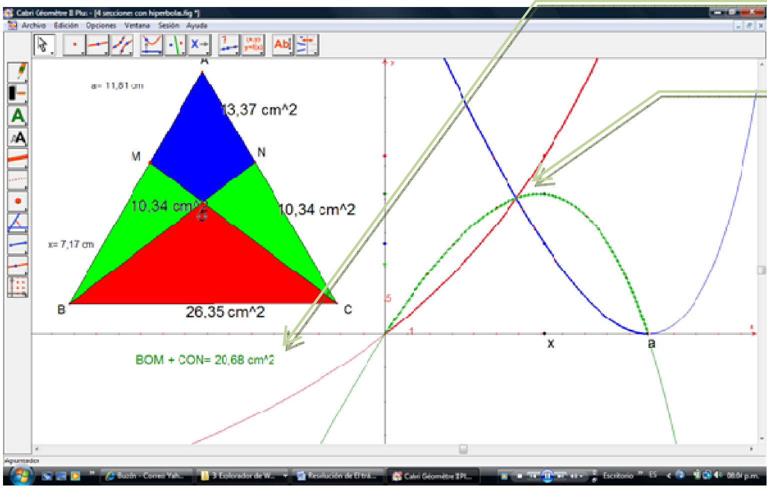



**Ilustración 11**




11. Redefinición de las curvas como cónicas
12. Ecuaciones de las hipérbolas
13. Intersecciones de las curvas

**Ilustración 12 A**




14. Redefinición del problema a tres secciones: MONA, (BOM+CON) y BOC
15. Intersección del sistema de hiperbolas

**Ilustración 12 B**

**El video del problema de las cuatro secciones.**

El clip del video del problema de las cuatro secciones tiene una duración de 8 minutos con 36 segundos y está presentado en formato *.***AVI***.[4]

Con un tamaño de 36.2 MB, comprimido alcanza solo 6.15 MB utilizando el compresor WIN ZIP[5]. Este peso le hace transferible en la plataforma *Webexone*[6], donde se efectuó el congreso virtual que se describe más adelante, incluso es portable para adjuntarse en algún servidor de correo electrónico.

El video presenta una versión dinámica del problema de las cuatro secciones y en él se hace referencia a uso del grabador Smart[7] para obtener la grabación en formato ***.avi***

El video estuvo disponible en la plataforma durante el periodo de duración del Congreso y se incluye en el Disco compacto anexo a este documento.

En el fotograma que muestra la ilustración 13, el video establece los elementos requeridos para hacer una representación gráfica del comportamiento de las cuatro áreas de las secciones establecidas, en función de la distancia de B a M, que se ha llamado x.


**Ilustración 13**

[4] Audio Vides Interlaved (AVI). Es un tipo de archivo contenedor de pistas de video y sonido en múltiples formatos. Tomado de *http://www.mundodivx.com/glosario.php*
[5] Compresor de archivos comercial.
[6] http://www.webex.com.mx/
[7] Herramienta del SmartBoardSoftware disponible en los pizarrones electrónicos Smart instalados en las escuelas primarias del país y en los Centros de Maestros del D.F.

Con fines didácticos se ha utilizado un triángulo equilátero de 10 cm de lado, y se presentan los ejes cartesianos en donde se han transferido las magnitudes involucradas. (Ilustración 14)

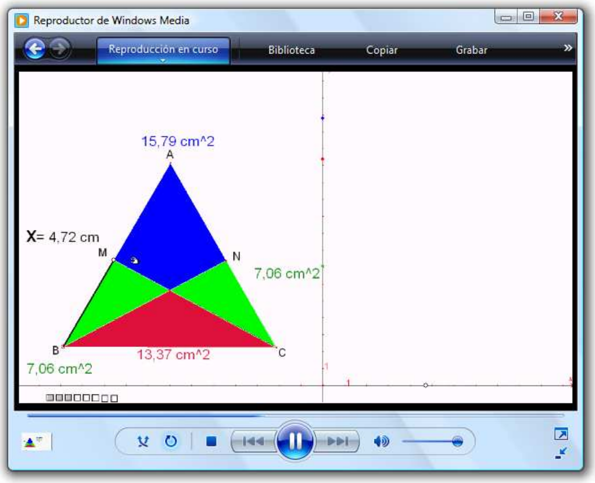



**Ilustración 14**

Se muestran los lugares geométricos de los puntos de la forma $(x,Y_1)$, $(x,Y_2)$, y $(x,Y_3)$; recurriendo a uso de colores que permitan la identificación inmediata del lugar geométrico que corresponde a determinada sección. (Ilustración 15)

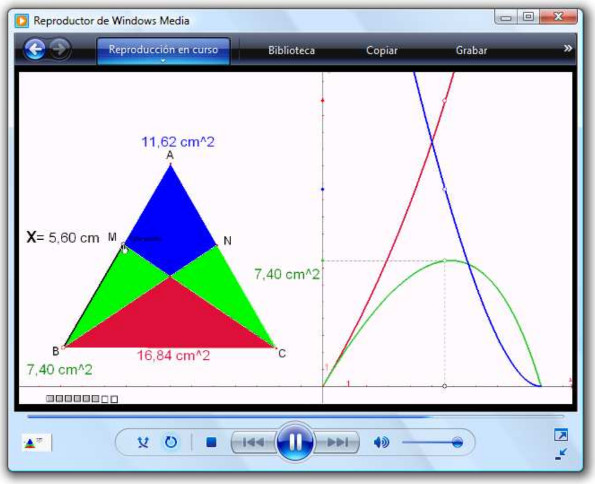



**Ilustración 15**

Se muestra que, estos lugares geométricos son reconocidos por Cabri Géomètre como hipérbolas. (Ilustración 16)

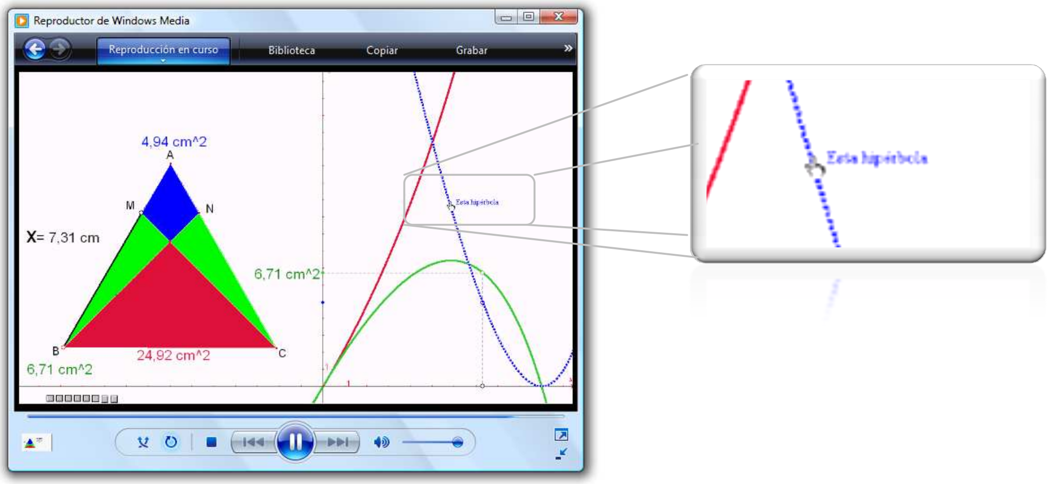



**Ilustración 16**

El video hace énfasis en algunas consideraciones que se obtienen visualmente, sin recurrir a representaciones algebraicas y sin explicitar formalmente la solución.

Es necesario mencionar que la grabación del video se planeó para que fuera observable solo una superficie limitada de la hoja que muestra el software Cabri Géomètre, para evitar que los participantes accedieran a los pasos de la construcción. Esta tarea estaba reservada para los profesores con el objetivo de que diseñaran sus propuestas de construcción en éste u otros softwares.

## *El taller en línea*

El taller titulado "Secuencias didácticas con uso de software gratuito" estuvo a cargo de este sustentante y se desarrolló del 7 al 21 de octubre de 2007 bajo la plataforma de *Webexone*, en el marco del **V Congreso Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas**[8], auspiciado por la Universidad de Guadalajara a través del programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, AC.

El taller en línea estuvo dirigido inicialmente a profesores de Educación básica (o su equivalente en el currículum extranjero) aunque la inscripción y la posterior aceptación, a criterio de los organizadores del evento, no se restringió a ello. El propósito fue mostrar a los profesores el potencial didáctico del software gratuito en el diseño de secuencias didácticas con apoyo de tecnología.

La metodología de trabajo del taller estaba orientada a desarrollar, durante los catorce días de duración del taller, una serie de actividades que permitieran al profesor un acercamiento al uso educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Estas actividades se propusieron en tres bloques:

- **Bloque 1**

1. Descargue el documento anexo[9] y de una revisión superficial.
2. Observe a detalle la caricatura[10] de la página 4. Dé una opinión al respecto.
3. Reflexione sobre el uso de la tecnología en el aula y compártanos su experiencia.
4. Resuelva "El problema de las cuatro secciones" con lápiz y papel. (Propuestas de solución opcional)

- **Bloque 2**

1. Lea el capítulo "El sentido pedagógico del uso de la tecnología", del documento base. Escriba su opinión sobre el sentido pedagógico que debe tener la tecnología en el aula.

[8] Página grabada en el CD anexo
[9] El documento al que se hace referencia es "El uso educativo de las TIC en la escuela secundaria" disponible en la Dirección General de Educación Secundaria Técnica. También se anexa en el CD adjunto.
[10] Ver al anexo B

2. Observe las actividades propuestas (no las secuencias didácticas) en el documento que hace referencia a tópicos de matemáticas. Analícelas y opine al respecto. Recuerde que dichas actividades están destinadas a alumnos de educación secundaria.
3. Descargue el programa POLY32[11], en la siguiente dirección:

http://www.peda.com/ Explore, analice su potencial didáctico. Explique cómo podrá usarlo usted en una clase de matemáticas.

4. Resuelva el problema "El triángulo en el círculo".

- **Bloque 3**

Descargue el programa **reticular**[12]. Este, es un interactivo que permite visualizar un espectro de temas relacionados a lo largo del mapa curricular (hay que aclarar que en México se ha echado a andar un nuevo programa de estudios: el plan 2006, cuyos contenidos son abordados por este software). Seleccione un tema (dando un clic en alguno de ellos) y analice su espectro temático, sobre todo en la secuencia de los conocimientos y habilidades que ese apartado pretende abordar. Describa las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido y cómo la tecnología puede tener un papel determinante.

Observe el video **Las cuatro secciones[13],** disponible en la sección *DOCUMENTS*. Vuelva a intentar una solución al problema. Describa con detalle: ¿El video reformuló su percepción del problema?

Descargue el software "Smart board software" (la dirección se encuentra en el documento base, o bien utilice un buscador en internet. Explore. Experimente. Vea su potencial didáctico.

[11] Sofware de evaluación. Disponible en el CD adjunto
[12] Software desarrollado por la subdirección Académica de la **DGEST**. Ver el anexo C. Disponible en el CD adjunto.
[13] Anexo CD

## *Recopilación de datos*

Durante el desarrollo del taller, la resolución de los problemas propuestos por los participantes, se fueron adjuntando en la sección **Discussions**, en la plataforma[14] de **Webexone**[15]. Estas evidencias de las expresiones escritas representan la evidencia más fuerte que guiaron el análisis de la información. También se guardaron los archivos que los participantes iban adjuntando en el espacio del taller virtual, y los correos electrónicos que se intercambiaron durante este proceso.

De éstos, se fueron agrupando los trabajos que mostraban mejor detalle de los procesos matemáticos, que mostraban evidencia de los recursos cognitivos que requerían las resoluciones de los problemas. Estos documentos se encuentran agrupados en el Anexo A.

El análisis de los datos se apoya también en los archivos que los profesores crearon bajo el ambiente de geometría dinámica que ofrecen los paquetes Cabri Géomètre (archivos con extensión ***.FIG**) y The Geometer's Skechtpad (archivos con la extensión ***.gps**)

Esta recolección de datos se anexa al presente documento en un disco compacto.

### Análisis de la información

El análisis de la información de esta investigación es de corte cualitativo y se dividió en dos momentos:

- El primero de ellos comprendió un análisis preliminar con el propósito de dar un seguimiento a los participantes. El objetivo de este momento fue la selección de aquellos participantes a los cuales se les realizaría la entrevista.
- El segundo momento necesitó de la totalidad de los datos recolectados, tomando en cuenta las estrategias de análisis y los criterios de validez de los resultados.

[14] Anexo A. Página disponible desde el CD adjunto.
[15] www.webexone.com/

Las estrategias de análisis comprendieron:

- **Niveles de observación**: individual y grupal. En el individual, se analizó el proceso que siguen los participantes cuando interactúan con actividades que pueden favorecer la formulación y seguimiento de conjeturas. Las evidencias de este proceso se reflejaron en los archivos de las expresiones escritas recuperadas de la plataforma Wexone. En la grupal, se refiere a las evidencias de trabajo colectivo que permite este tipo de taller.
- **Categorías de análisis**. Donde se analizaron las características que exhibieron los participantes en la solución de los problemas y que involucran el uso de la tecnología. Aquí se tuvieron presente dos dimensiones: la dimensión amplificadora y la dimensión reorganizadora.

# ESTUDIOS DE CASO

## *Estudio de caso con Mario*

Mario (**M**), es un miembro del Instituto de Profesores de Artigas, Uruguay. La siguiente sección, es una transcripción de los archivos intercambiables que se adjuntaban en la plataforma informática del taller; y en él se muestra su posición respecto a los problemas planteados por un *entrevistador* (**E**) en función a las discusiones que se promovían en este ambiente virtual.

En este intercambio en tiempo diferido, se enviaron comentarios para crear un ambiente de discusión en el taller y en este documento se han registrado en color rojo.

Los comentarios que intentan resaltar aspectos relevantes para el análisis están registrados en color azul y son posteriores a la discusión propia del taller.

**Bloque 1**

(1) *(**E**ntrevistador): Observe a detalle la caricatura de la página 4. Dé una opinión al respecto.*

(2) (**M**ario): La caricatura me lleva a pensar en la tecnología al servicio de la enseñanza de la matemática pero donde lo que se hace con la tecnología es exactamente lo mismo que se haría sin ella. La tecnología aquí parecería únicamente agregar distancia entre estudiante y profesor.

(3) (***E***) **Así es, la herramienta no es mediadora. De este modo su uso no es justificable.**

(4) *(**E**)  Reflexione sobre el uso de la tecnología en el aula y compártanos su experiencia.*

(5) (**M**) El solo hecho de disponer de tecnología a la hora de enseñar no hará que la enseñanza mejore. Si bien debemos tener presente la existencia de la tecnología disponible y al alcance de cada vez más personas, este hecho

no hace más que traer a discusión de qué forma debemos emplearla para mejorar la educación. Lo que muchas veces ocurre es que las nuevas herramientas se agregan, se superponen a los antiguos métodos de enseñanza haciendo que las viejas tareas se simplifiquen pero que simultáneamente pierdan sentido: alcanza con pensar en las calculadoras usadas a la hora de hacer las primeras operaciones en los primeros años escolares donde sumar 123 + 234 hecho con la calculadora pierde totalmente el sentido y con el agravante de que muchas veces el niño responde 28782 sin inmutarse ya que en vez de + puso x al hacer el cálculo. No solo perdió el sentido la tarea original sino que además se perdió el sentido acerca de si la respuesta obtenida es factible o no.

En cuanto a mi experiencia: he trabajado con estudiantes de bachillerato con el software *The Geometer's Sketchpad* en cursos de geometría y confieso que las experiencias han sido de lo más interesantes: los estudiantes se involucran de una forma distinta con las actividades en la medida que pueden elaborar ellos mismos sus propias conjeturas y también pueden descartarlas rápidamente dando paso a una nueva.

(6) (***E***) **Sería interesante que nos platicara, en el foro, con más detalle esta experiencia. La geometría dinámica es un recurso de mucho potencial didáctico.**

(7) *(**E**): Resuelva el siguiente problema con lápiz y papel.*

*Sea ABC un triángulo equilátero.*

*Se marca un punto M sobre AB y se traza una paralela a BC que pasa por M.*

*La intersección de esta paralela con BC la llamaremos N.*

*Se traza el segmento BN y el segmento MC, cuya intersección es O.*

*El triángulo ABC ha quedado dividido en cuatro secciones: BOM, MONA, NOC y BOC. A la distancia entre B y M la llamaremos x.*

*Como M es arbitrario, las áreas de las cuatro secciones dependen de x.*

*Encuentre el valor de x donde las cuatro secciones tienen la misma área.*

(**M**): Relato mi forma de pensar el problema:

Dibujé un triángulo equilátero y marqué (casualmente) M más cerca de A que de B. Ubiqué los puntos restantes y observé que los triángulos BOM y CON son iguales y que en la posición de M considerada o incluso si se arrimaba al punto M más a A el área del cuadrilátero AMON se achicaba y aproximaba a cero.

Dibujé un segundo triángulo equilátero, ahora marqué M más próximo a B que a A. Observé que si se arrimaba el punto M a B el área de BCO se achicaba y se aproximaba a cero, también pasaba lo mismo con BOM.

Conclusión de todo lo anterior: la solución implica que M no esté próximo a A ni a B.

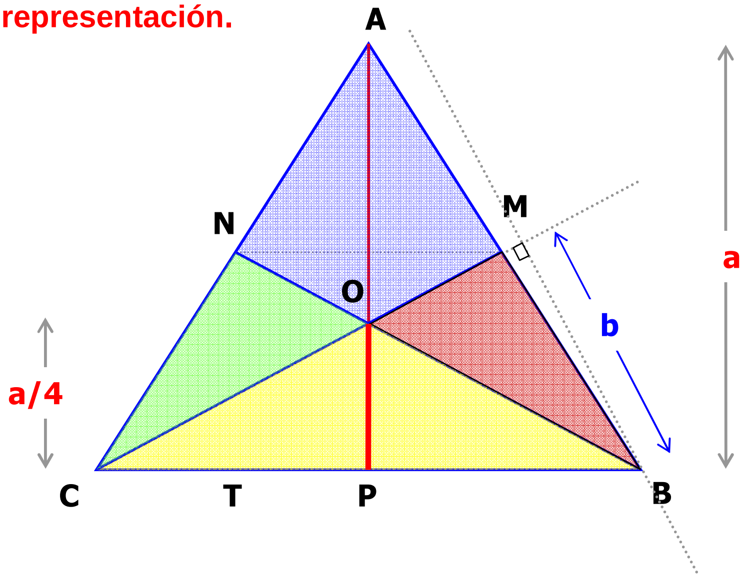
Ahora pensé que el área de cada una de las 4 figuras consideradas tenía que ser la cuarta parte del área del triángulo ABC, entonces el triángulo BCO solución lo podía hallar: la altura respecto al lado BC tenía que ser la cuarta parte de la altura de ABC.

Pero para esa posición me pareció que el triángulo BOM no tenía la misma área que BCO, pero si estaba pasando esto EL PROBLEMA NO TIENE SOLUCIÓN.

¿Cómo explicar esto? Los triángulos BCO y BOM tienen la misma altura respecto al vértice B, entonces para que tengan la misma área deberían tener bases CO y OM iguales, O tendría que ser punto medio de CM. Pero esto nunca ocurre salvo cuando O es el punto medio de BC (donde no tendríamos las 4 regiones).

Disculpas por no adjuntar las figuras hechas en papel (mi escáner hoy decidió no hacerme caso).

(8) (***E***) **De acuerdo a sus observaciones, tendríamos la siguiente representación.**




**Por lo tanto, ¿deduce que no hay solución al problema bajo estas condiciones?**

**¿Sería tan amable de modelar el problema en Sketchpad y compartirnos sus observaciones?**

**Bloque 2**

(9) *(**E**): Lea el capítulo "El sentido pedagógico del uso de la tecnología", del documento base. Escriba su opinión sobre el sentido pedagógico que debe tener la tecnología en el aula.*

(10) (**M**): La herramienta tecnológica hará más significativa la educación sólo si ésta es concebida como fuente de nuevos desafíos intelectuales a los cuales enfrentar a nuestros estudiantes. Las nuevas posibilidades tecnológicas obligan a repensar nuestra tarea como docentes - muchas veces las viejas actividades pasan a no tener sentido- el desafío es repensar nuestra tarea teniendo en cuenta que hay una serie de

herramientas de fácil acceso y manejo que debemos poner al servicio de hacer la enseñanza más significativa.

Partimos de que el objetivo de toda innovación educativa debe justificarse a partir de la mejora del aprendizaje de los alumnos y de la calidad de lo aprendido, no todo lo existente es obsoleto y no todo lo nuevo es “mágico”. La tecnología no puede ofrecer una solución milagrosa.

Debemos reconocer también que las dificultades (económicas, psicológicas, sociales) no se solucionan solamente con más tecnología, ya que su sentido dependerá no tanto del instrumento sino del que lo utiliza. En definitiva, el centro sigue siendo el hombre y no la herramienta, y sólo debería incorporarse si es un cambio significativo para el aprendizaje. Apostar a que lo puede ser implica aceptar un desafío.

(11) *(**E**): Observe las actividades propuestas (no las secuencias didácticas) en el documento que hacen referencia a tópicos de matemáticas. Analícelas y opine al respecto. Recuerde que dichas actividades están destinadas a alumnos de educación secundaria.*

(12) (**M**): A partir de las actividades planteadas en las páginas 32, 33, 38 a 41 del documento considero que hay algunos cambios necesarios e imprescindibles en el posicionamiento de docentes y estudiantes. ¿Cuáles serían características deseables de un nuevo enfoque?:

- Qué se valore el proceso que pueda hacer cada estudiante.
- Concebir al profesor como orientador de las actividades, dando sugerencias, ayudando a analizar ciertas cuestiones, creando un clima apropiado en la clase, organizando el debate.
- Aceptar que el estudiante es quien debe hacer frente a la situación planteada recurriendo a sus propios conocimientos, tratando de encontrar una vía de solución que tenga sentido para él mismo.

- Ahora los conocimientos habrán de “hacerse”, se buscará estar a la altura de las situaciones planteadas construyendo una respuesta propia.

Claro que esta reflexión debe ser colectiva y nutrirse del aporte de cada colega ya que la enseñanza es una tarea colectiva y como tal debe ser encarado su análisis y también la elaboración de propuestas alternativas.

(13) (***E***)**¿Qué opina de las actividades propuestas?¿Son pertinentes?¿adecuadas?¿la tecnología cumple su papel mediador?**

(14) *(**E**): Descargue el programa POLY32, de la siguiente dirección: http://www.peda.com/ Explore, analice su potencial didáctico. Explique cómo podrá usarlo usted en una clase de matemáticas.*

(15) (**M**): El programa se podría usar para analizar desarrollos y construcciones de una larga lista de poliedros ‘interesantes’ (Platónicos, Arquimedianos, de Catalán...).

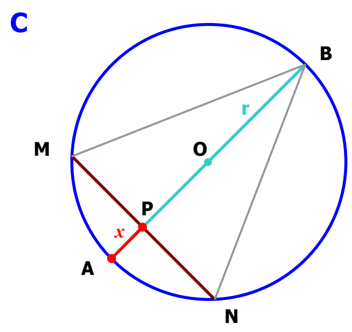
(16) *(**E**): Segundo problema opcional.*

*Sea C una circunferencia de centro O y radio r.*

*Sea P un punto cualquiera del diámetro AB, desde donde se traza una cuerda MN perpendicular a dicho diámetro.*

*Sea x la distancia AP.*

*Calcula el valor de x (en términos de r), para que el triángulo MBN tenga el área máxima.*




(17) (**M**):

$OP = r – x$

$NP = \sqrt{x(2r – x)}$

área MBN $(x) = (2r – x)\sqrt{x(2r – x)}$

área MBN’(x) = (2r – x)(r – 2x) /√x(2r – x)

El máximo se da para x = r/2.

(18) (***E***)**¿Por qué?**

**¿Quién es MBN’?**

**¿Cómo lo justifica?**

**Bloque 3**

(19) *(**E**): Descargue el programa “reticular”. Este, es un interactivo que permite visualizar un espectro de temas relacionados a lo largo del mapa curricular (hay que aclarar que en México se ha echado a andar un nuevo programa de estudios: el plan 2006, cuyos contenidos son abordados por este software). Seleccione un tema (dando un clic en alguno de ellos) y analice su espectro temático, sobre todo en la secuencia de los conocimientos y habilidades que ese apartado pretende abordar. Describa las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido y cómo la tecnología puede tener un papel determinante.*

**No hubo respuesta del participante**

(20) *(**E**): Vea el video “Las cuatro secciones” disponible en la sección DOCUMENTS. Vuelva a intentar una solución al problema. Describa con detalle: ¿El video reformuló su percepción del problema?*

(21) (**M**): El video de las cuatro secciones no lo pude bajar (al igual que los otros softwares) pero por lo hablado con otra colega me hago la idea se asemeja bastante a un modelo dinámico como el que adjunto hecho con Sketchpad.

A partir de dicho modelo se puede constatar empíricamente que no hay ninguna posición de M (el punto variable) para la cual el área de las cuatro secciones sean iguales. Esto posibilita empezar a pensar en el por qué, en encontrar las razones que expliquen los hechos. Haciéndolo con lápiz y papel gran parte del esfuerzo se fue en hallar un punto que no existía.

**La imagen principal del modelo dinámico se muestra en la ilustración 17:**

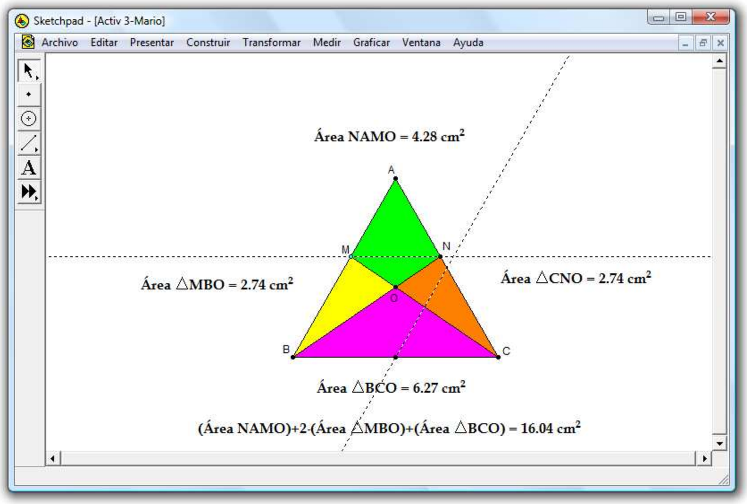



**Ilustración 17**

(22) *(**E**): Descargue el software "Smart board software" (la dirección se encuentra en el documento base, o bien utilice un buscador en internet. Explore. Experimente. Vea su potencial didáctico.*

**No hubo respuesta del participante**

## Análisis de la entrevista con Mario

### El uso de la tecnología

Mario establece su posición en torno al uso de la tecnología como herramientas mediadora y no como simples artefactos que no promueven aprendizajes. (2), (11)

En su experiencia como profesor, ha utilizado el software The Geometer´s Sketchpad en cursos de geometría, y manifiesta un gran interés personal en las propuestas didácticas que incorporen esta tecnologías, fundamentadas por los resultados alentadores que ha obtenido en su ámbito profesional.(5).

### El problema de las cuatro secciones

Al enfrentarse al problema de las cuatro secciones, como refiere en (8), utilizando solo lápiz y papel, muestra un gran dominio geométrico de las condiciones que establece la situación y las plasma en conjeturas que describe en su “forma de pensar el problema”

En ese mismo renglón delimita un posible valor para x, que satisficiera el problema y del cual justifica con apreciaciones matemáticas derivadas de una estimación con cálculo mental: “Conclusión de todo lo anterior: la solución implica que M no esté próximo a A ni a B.”

Esta conjetura le permite estimar una posición probable para M (no cerca de A y no cerca de B). Después, da cuenta de que cuando la altura del triángulo COB es la cuarta parte de la altura del triángulo original, le “parece” que el triángulo BOM no tenía la misma área. Lo que le lleva a sospechar la posibilidad de que el problema no tuviera solución.

Observa que las alturas de los triángulos BCO y BOM son iguales. En particular, si ambos tiene la misma área, entonces los segmentos CO y OM deber ser de la misma magnitud; lo que no ocurre salvo cuando O es el punto medio de CM y con la implicación de que no existan las cuatro áreas.

Aunque no muestra evidencia de su trabajo en lápiz y papel, puesto que su escáner “decidió no hacerle caso” su línea de razonamiento muestra que ha comprendido el problema y que su descripción de la propuesta de solución puede plasmarse siguiendo sus detalladas observaciones. (Ejemplo de ello es la representación que se pudo construir en 9)

De manera objetiva es posible sostener que las evidencias que muestra Mario en su descripción de propuesta de solución, sugieren el uso exclusivo de lápiz y papel en la resolución del problema, sin embargo, no se debe descartar que en algún momento pudo hacer uso de una herramienta que conoce y domina profundamente: la geometría dinámica.

Otra muestra de la coherencia entre su posición teórica y las evidencias que mostró en su interlocución en la plataforma, es su afirmación vertida en torno al uso pedagógico del software gratuito Poly32:

“El programa se podría usar para analizar desarrollos y construcciones de una larga lista de poliedros ‘interesantes’ (Platónicos, Arquimedianos, de Catalán...).”

Cuando a Mario se le envió el video de las cuatro secciones, (21), refiere inmediatamente la analogía a un modelo dinámico construído por el (Ilustración 18), en el que muestra un óptimo manejo del software The Geometer´s Sketchpad y del que se pueden obtener algunos datos específicos:

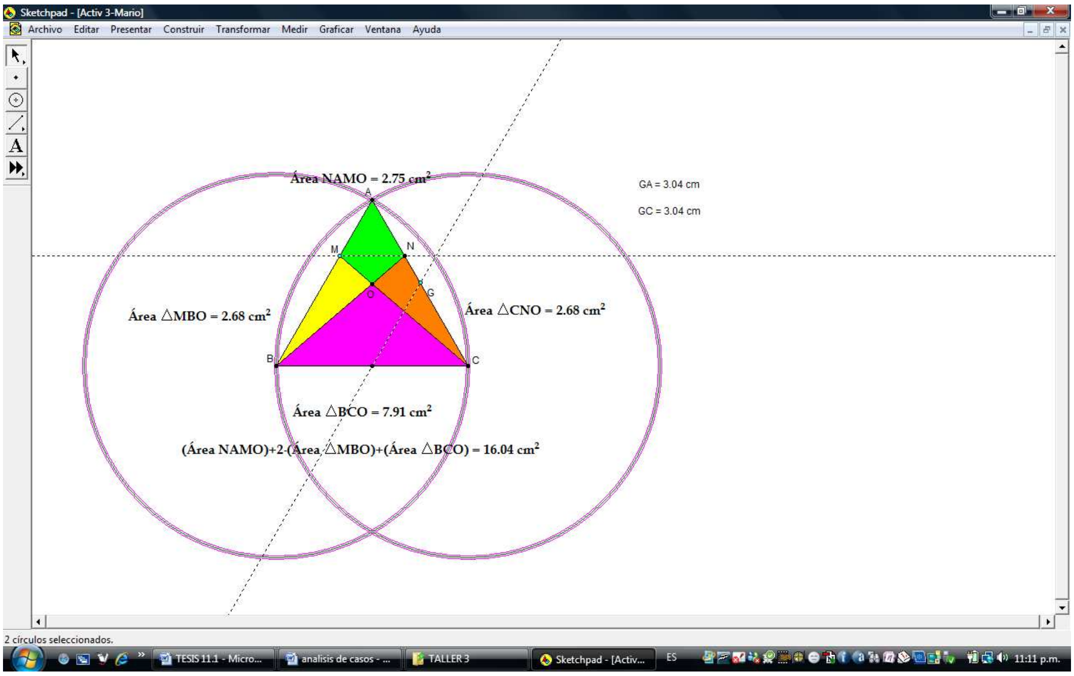



**Ilustración 18**

1. Primero construye un triángulo equilátero a partir del segmento BC, utilizando dos circunferencias cuyos centros son los extremos de este segmento y radios su longitud.
2. Establece a M como un punto dinámico sobre el lado AB.
3. Determina las cuatro secciones en función del punto M.
4. La “prueba del arrastre” demuestra la coherencia de la construcción.
5. Establece a G como punto medio de AC y por el traza una paralela a AB. Con este modelo dinámico, fundamenta finalmente, su conjetura inicial de la no solubilidad del problema.(22)

**El triángulo en el círculo**

Aunque en el archivo recibido desde la plataforma, algunos caracteres matemáticos no son compatibles con los programas que se estaban ejecutando en ese momento, se pudo reconocer que Mario establece la relación funcional entre x y el área del triángulo MBN como:

$$\mathrm{MBN}(x) = (2r - x)\sqrt{x(2r - x)}$$

De donde la derivada de MBN(x), es:

$$\mathrm{MBN}'(x) = \frac{(2r - x)(r - 2x)}{\sqrt{x(2r - x)}}$$

De ahí deduce que el máximo de esta función se alcanza en x=r/2

Al parecer, el problema no representó mayor dificultad para Mario.

## *Estudio de caso con Julio*

Julio *(**J**),* es un miembro de la Facultad de Ciencias Económicas y Jurídicas de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. La siguiente sección, es una transcripción de los archivos intercambiables que se adjuntaban en la plataforma informática del taller; y en él se muestra su posición respecto a los problemas planteados.

En este intercambio en tiempo diferido, se enviaron comentarios para crear un ambiente de discusión en el taller y en este documento se han registrado en color rojo.

Los comentarios que intentan resaltar aspectos relevantes para el análisis están registrados en color azul y son posteriores a la discusión propia del taller.

- **Bloque 1**

(1) *(**E**)*: *Descargue el documento anexo y de una revisión superficial.*

**No hubo respuesta del participante**

(2) *(**E**)*: *Observe a detalle la caricatura de la página 4. Dé una opinión al respecto.*

**No hubo respuesta del participante**

(3) *(**E**)*: *Reflexione sobre el uso de la tecnología en el aula y compártanos su experiencia.*

**No hubo respuesta del participante**

(4) *(**E**)*: *Resuelva "El problema de las cuatro secciones" con lápiz y papel. (Propuestas de solución opcional)*

(5) *(**J**):*

***El recuadro es edición de Julio y se respeta el formato propuesto.***

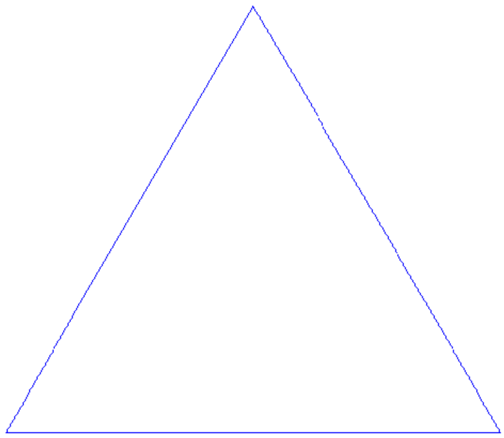
Cualquier triángulo equilátero presenta la característica de que sus tres lados resultan de igual longitud entre sí.

Identificando con **l** a cualquiera de esos lados, la altura, identificada con **h**, resultará equivalente a:

$$h = \frac{\sqrt{3}\, l}{2}$$

con lo que el área del respectivo triángulo será:

$$\text{Área ABC} = \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}\, l}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\, l^2}{4}$$



Ahora bien, si hacemos el trazado que nos sugiere el planteo del problema, habrá un triángulo, el **BOC**, que deberá contar con un cuarto de la superficie del triángulo del que se logra. Eso implica entonces que considerando la misma base **l** para el triángulo **BOC** ya que coincide con el lado del triángulo en el que se logra, y llamando **h'** a su altura, se tendrá que:

$$\text{Área BOC} = \frac{l \times h'}{2} = \frac{1}{4} \times \text{Área ABC} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}\, l^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\, l^2}{16}$$

de donde puede determinarse el valor de **h'**, el que resultará:

$$h' = \frac{\sqrt{3}\; l^2\; 2}{16 l} = \frac{\sqrt{3}\, l}{8}$$

que nos permite derivar que **h'** debe ser la cuarta parte de la altura del triángulo equilátero original, o sea:

$$h' = \frac{h}{4}$$

Para que se verifique esta relación entonces, el punto **O** debiera ser el punto que está a un cuarto de la altura del triángulo equilátero original, de la base del mismo, que resulta simultáneamente base del triángulo **BOC**.

Por otra parte, la determinación del **BOC**, implica simultáneamente la determinación del romboide **MONA**, compuesto en verdad por dos triángulos de igual área, el **MOA** y el **NOA**, que entre ambos deben tener igual área que **BOC** y también un área equivalente a la cuarta parte de la del triángulo equilátero original. Lo dicho puede expresarse como:

$$\text{Área}\,MONA = 2 \text{ x } \text{Área}\,MOA = 2 \text{ x } \frac{h'' \text{ x } \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{3}\,l}{2}}{2} = \frac{h''\,3\sqrt{3}\,l}{8}$$

aclarando que he llamado **h’’** a la altura del triángulo **MOA**, para el que he considerado la base como las tres cuartas partes de la altura **h** del triángulo equilátero original, ya que el punto **O** estaría, conforme a lo dicho previamente, a un cuarto de esa altura de la base de dicho triángulo.

Desde esta relación, y sabiendo que el área del romboide **MONA** es la cuarta parte del área total del triángulo equilátero inicial, se tiene que, el valor de **h’’** será:

$$\frac{\sqrt{3}\,l^2}{16} = \frac{h''\,3\sqrt{3}\,l}{8} \;\rightarrow\; h'' = \frac{\sqrt{3}\,l^2\,8}{16 \text{ x } 3\sqrt{3}\,l} = \frac{l}{6}$$

Como **h’’** es la mitad del segmento **MN** construido, puede concluirse entonces que éste tiene una longitud del doble de **h’’** y por lo tanto:

$$MN = 2 \text{ x } h'' = 2 \text{ x } \frac{l}{6} = \frac{1}{3}\,l = \frac{l}{3}$$

Ahora bien, como el segmento **MN** por construcción es paralelo a uno de los lados del triángulo equilátero original, cualquiera sea el lugar en que resulte trazado, determine con el vértice opuesto al lado del triángulo original paralelo a **MN** un nuevo triángulo, también equilátero.

Como **MN** es equivalente entonces a la tercera parte del largo del lado original del triángulo **ABC**, entonces el punto **M** debe estar a un tercio del vértice **A** sobre el lado **AB** del triángulo original, y por lo tanto **x**, que es la distancia de **M** a **B**, tiene que ser equivalente a dos tercios de la longitud del lado.

Vamos por una situación que contemple números que permitan verificar lo dicho desde esta mirada. Al efecto supongamos un triángulo rectángulo **(SIC)**[16] de 12 centímetros de lado.

Su altura será de:

$$h = \frac{\sqrt{3}\,12}{2} = 6\sqrt{3}$$

La superficie de ese triángulo será entonces de $\frac{12 \text{ x } 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ lo que lleva a que cada una de las cuatro partes planteadas como divisiones según el problema, tendrían que tener un área de $\frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ .

Si estamos en lo cierto, el triángulo **BOC** que tiene base equivalente a **12 centímetros** y cuya altura debiera ser un cuarto de la del triángulo original, resultaría:

$$\text{Sup. BOC} = \frac{12 \text{ x } \frac{6\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

que verifica lo anticipado respecto del valor del área.

[16] Es obvio que Julio se refiere a un triángulo equilátero de 12 cm de lado

Para el romboide **MONA** (siempre respetando la idea de la gráfica derivada del planteo), se tendrá que su superficie equivale a la mitad del producto entre la diagonal mayor y la menor. La mayor, por lo dicho equivale a las tres cuartas partes de la altura del triángulo equilátero dado, o sea para el caso:

$$\textbf{Diagonal mayor} = \frac{3}{4}6\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

mientras que la diagonal menor, que equivale al segmento **MN**, tiene una longitud equivalente a las dos terceras partes del lado, o sea para el caso:

$$\textbf{Diagonal menor} = \frac{1}{3}12 = 4\ \textbf{centímetros}$$

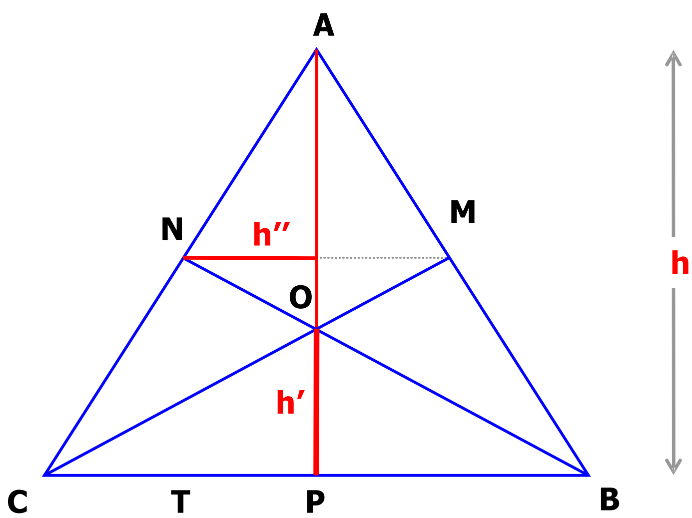
de donde entonces puede deducirse que:

$$\textbf{Área MONA} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}\,4}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

que coincide con el área del triángulo **BOC** y a su vez, con la cuarta parte del área del triángulo equilátero original de 12 centímetros de lado.

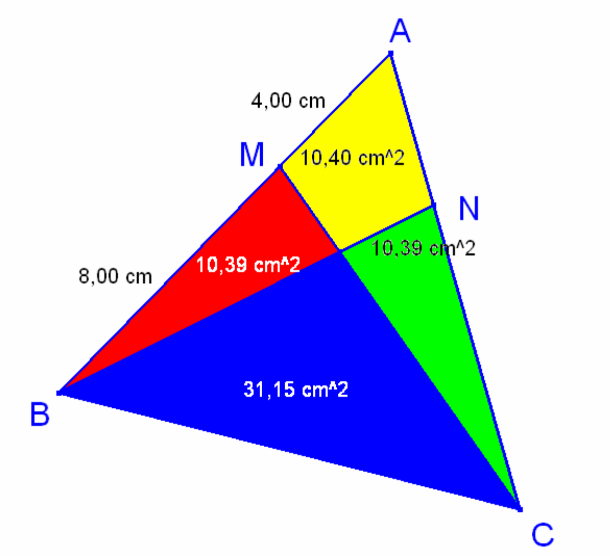
Lógicamente como los dos espacios restantes son iguales entre sí (puede verificarse por semejanza de triángulos que tienen un lado igual, equivalente a dos tercios del largo del lado original y por lo tanto de 8 centímetros cada uno, lo que los lleva a la igualdad), podemos deducir fácilmente que también ellos tendrán superficie de $9\sqrt{3}$.

(6) (***E***)**De acuerdo a su descripción, obtendríamos la siguiente figura:**



**Sin embargo, desarrolla usted un mecanismo para determinar las áreas por separado, lo que le lleva a encontrar resultados independientes… pero no los está relacionando en función de x.**

**Para un triángulo equilátero de 12 cm de lado, y tomando tu conclusión de que x es dos tercios de la longitud del lado (es decir, x=8cm), encontré las siguientes áreas:**




**¿Qué pasó entonces?**

- ***Bloque 2***

(7) *(**E**): Lea el capítulo "El sentido pedagógico del uso de la tecnología", del documento base. Escriba su opinión sobre el sentido pedagógico que debe tener la tecnología en el aula.*

(8) *(**J**):* El uso áulico de la tecnología en la dirección en que se toma en el material suministrado, debe ser tal que genere en el alumno aprendizajes más sólidos, y tal vez también más simples de lograr, que los que se lograrían de no existir esa herramienta. Pero la herramienta por sí sola no garantiza como pareciera que muchos creemos, que su uso lleva inevitablemente a esos resultados. El uso de computadoras debe ser acompañado para potenciarlo y hacerlo eficiente, con un buen diseño de

materiales, con buenas propuestas pedagógicas que inviten al alumno a realizar el aprendizaje de lo que se pretende que alcance, a involucrarse, a tentarse con ese aprendizaje. De otro modo el aporte esperado no se logrará. Y allí es donde surge con toda su fuerza el trabajo docente, que obliga a pensar detenidamente el qué, el cuándo, el cómo y el dónde hacer uso de la oferta tecnológica, sin descuidar por supuesto quiénes son los destinatarios de sus propuestas y cuáles los objetivos a alcanzar.

Incluso me sospecho que propuestas que pudieran tener excelentes resultados con un grupo o en un medio determinado, podrían necesitar de significativas adecuaciones para aplicarlas en otro contexto o con otro grupo de estudiantes, porque en gran medida, la formación previa, el contacto con las tecnologías, el interés por las propuestas puestas a su alcance, podría derivar en algunos casos en éxitos rotundos y en otros en lamentables sensaciones de fracaso.

No debería pensarse en suplantar el diseño de propuestas docentes, con el mero uso de “enaltados” que a otros o en otros momentos, han mostrado eficiencia en su uso. En definitiva, adoptar el aporte, pero adecuándolo conforme a las necesidades, objetivos y pretensiones particulares, sin olvidar que cada vez más nuestros alumnos están inmersos en la realidad tecnológica y en muchos casos mucho más que los propios docentes.

Una cuestión no menor que debiera contemplarse es la relativa a la integración de conocimientos, propios de la formación que están concretando los alumnos en su paso por el aula ante diferentes asignaturas, y a su vez, con todos los conceptos previos que han sido objeto de aprendizaje en momentos anteriores o en cursos o niveles previos de educación. La realidad está incidida por múltiples facetas, y las propuestas que se hagan con apoyo tecnológico, pueden optimizar esta faceta de integración que comento.

(9) *(**E**)*: *Observe las actividades propuestas (no las secuencias didácticas) en el documento que hacen referencia a tópicos de matemáticas. Analícelas y*

*opine al respecto. Recuerde que dichas actividades están destinadas a alumnos de educación secundaria.*

(10) ***(J):*** Algunas de las citas realizadas a utilitarios disponibles me han sorprendido significativamente, ya que confieso que las desconocía. Estimo que varias de las propuestas son ideas interesantes para aplicar, y que vale la pena incursionar en las sugerencias para optimizar nuestra mediación áulica en pos de mejores logros fundamentalmente en la formación de nuestros educandos, futuros hacedores de nuestra comunidad. Esos utilitarios y algunas de las propuestas parecen sumamente ricas para permitir que los alumnos incursionen por sí mismos, con el auxilio, guía o intervención docente que los oriente adecuadamente para evitar infructuosos esfuerzos, en nuevos aprendizajes, que pueden realizar incluso en forma cooperativa, alimentándose los unos con los pareceres de otros. La posibilidad que se desprende de algunos comentarios y propuestas para que los alumnos trabajen por sí mismos, incluso haciendo propuestas que lo lleven a errores que ellos mismos podrán detectar y/o corregir, hasta derivado de alguna intervención docente que permita visualizar lo que pudiera pasar inadvertido a ellos, enriquecería lo que aprendan y los prepararía además a generar su propio criterio de encarar nuevos aprendizajes cuando ya no revistan la calidad de alumnos, lo que sin duda les tocará en este mundo tan rápidamente cambiante, y que de no haberse adiestrado en esa línea, podría acarrearles serias dificultades en ese futuro cada vez más próximo.

(11) *(**E**)*: *Descargue el programa POLY32, de la siguiente dirección: http://www.peda.com/ Explore, analice su potencial didáctico. Explique cómo podrá usarlo usted en una clase de matemáticas.*

(12) ***(J):*** He bajado el soft poly32 y he revisado lo que ofrece al usuario. Me ha parecido sumamente interesante la forma de presentación que ofrece a

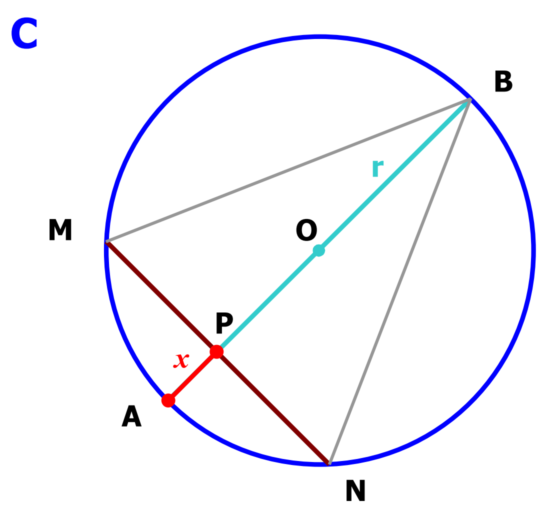
quien incursiona en él, y puedo decir que las imágenes mostradas son sumamente claras para el visitante. Las secuencias automáticas que transforman cada poliedro desde y hacia las diferentes formas de desplegarlo o verlo, son sumamente ágiles y dan una idea acabada de lo que exhiben.

Sin embargo, me parece que excede los abordajes tradicionales de trabajo con poliedros en la educación media (en donde hace años no incursiono), y hasta en cursos iniciales del nivel superior, al menos en los que no son específicamente vinculados con el estudio de la matemática, máxime cuando en general, no hacen demasiado hincapié (en mi experiencia personal) en temas relativos a la geometría.

De cualquier manera, me parece interesante poder mostrar a los alumnos no sólo la oferta existente de este soft, sino tomar de allí algunas interesantes ideas de presentación para ser aplicadas en otras propuestas didácticas que pudieran generarse para los alumnos. Personalmente no podría hacer una utilidad de este soft en su estado puro en los cursos a mi cargo por escapar a la temática correspondiente al programa de la asignatura.

(13) *(**E**)*: *Resuelva el problema “El triángulo en el círculo”.*

(14) (***J***)*:* Sabemos que para cualquier cuerda perpendicular a un diámetro, la semicuerda (mitad de la cuerda) resulta medio proporcional entre los segmentos en que queda dividido el diámetro.



Tomando la gráfica suministrada, resultaría que:

$$\frac{2r-x}{MP}=\frac{MP}{x} \quad \rightarrow \quad MP^2=(2r-x)x \quad \rightarrow \quad MP=\sqrt{(2r-x)x}$$

de donde puede deducirse con simpleza que:

$$MN=2\,MP=2\sqrt{(2r-x)x}$$

Si ahora expresamos el área del triángulo **MNB**, como la mitad del producto entre su base (**MN** para el caso) por su altura (**(2r – x)** en nuestro caso), se tendría:

$$\text{Área de MNB}=\frac{2\sqrt{(2r-x)x}\,(2r-x)}{2}=\sqrt{(2r-x)x}\,(2r-x)=(2r-x)^{3/2}\,x^{1/2}$$

Pretendemos que esta área resulte máxima, por lo que entonces, la derivada de su expresión debe ser nula. Llamando A al área, esa derivada resulta:

$$A'=-\frac{3}{2}(2r-x)^{1/2}\,x^{1/2}+\frac{1}{2}(2r-x)^{3/2}\,x^{-1/2}$$

que podría expresarse también como:

$$A'=\frac{1}{2}(2r-x)^{1/2}\,x^{-1/2}\left[-3x+(2r-x)\right]=\frac{1}{2}(2r-x)^{1/2}\,x^{-1/2}\left[-4x+2r\right]$$

que se anulará cuando resulte nulo para el caso, o bien el factor **(2r – x)** o bien el factor **(-4x+2r),** o cuando lo sean ambos a la vez. Para que resulte nulo el primero de los factores aludidos, debe ser **x = 2r**, y para que lo sea el segundo, debe ser **x = (1/2)r**.

El primero de los casos, cuando **x = 2r**, es evidente que es el que corresponde a un área mínima, aquella que se lograría con **P** superpuesto con **B** para el caso, por lo tanto es desechable para el caso. En cambio el otro, donde **x** equivale a la mitad del radio, haría que el área pretendida resultara la máxima.

Por lo tanto, el valor de **x** para el caso que hace que el área del triángulo indicado resulte ser máxima es equivalente a la mitad del radio.

- ***Bloque 3***

(15) *(**E**)*: *Descargue el programa* ***reticular***. *Este, es un interactivo que permite visualizar un espectro de temas relacionados a lo largo del mapa curricular (hay que aclarar que en México se ha echado a andar un nuevo programa de estudios: el plan 2006, cuyos contenidos son abordados por este software). Seleccione un tema (dando un clic en alguno de ellos) y analice su espectro temático, sobre todo en la secuencia de los conocimientos y habilidades que ese apartado pretende abordar. Describa las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido y cómo la tecnología puede tener un papel determinante.*

**No hubo respuesta del participante**

(16) *(**E**)*: *Observe el video* ***Las cuatro secciones*** *disponible en la sección DOCUMENTS. Vuelva a intentar una solución al problema. Describa con detalle: ¿El video reformuló su percepción del problema?*

(17) *(**J**): Bien!!!,* Tal cual su apreciación… no de gusto está a cargo del taller!!!!

Mis conclusiones fueron lo que “debiera” ser y no lo que “efectivamente es”, y eso implica varia acumulación de errores por inobservancia de circunstancias. ¡Cuántas veces le ocurrirá algo similar a nuestros alumnos y no percibimos qué es lo que ha pasado por su cabeza para llegar a donde ha llegado!!!

Pero vamos a las reflexiones:

1) Sobre el área del triángulo BOC, que en definitiva para que tenga un cuarto del área total debe tener un cuarto de la altura del triángulo del que se lo logró… estamos de acuerdo y creo (ya no me animo a ser categórico) que lo hecho está correcto. Su área de esa forma, tiene precisamente la cuarta parte de la total, que es uno de los requisitos del planteo. Verifica una de las condiciones exigidas. Es

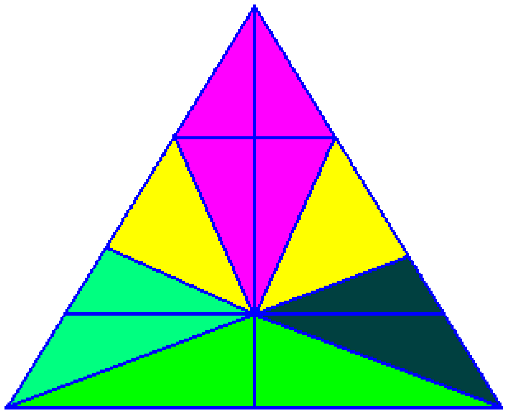
una condición necesaria, pero que evidentemente aún no es suficiente.

2) Ahora caemos en el cuadrilátero, el romboide, al que le hemos puesto la condición de que tenga un cuarto del área del triángulo original (en área pero no en espacio limitado por los lados del triángulo y las líneas trazadas que definen de ese modo el contorno), y del que conocemos su base (las tres cuartas partes de la altura total del triángulo original), pero no la altura con que requiere contar para que su área sea la esperada o pretendida. La facilidad con que se determina cuál “debería” ser esa altura, llevó a que se determinara que la misma tenía que corresponderse con determinado valor. Y eso tampoco está mal en el planteo, ya que su valor está bien determinado. Otra vez… ¡o eso creo!
3) Tras esta determinación anterior, se derivó cuál debería ser el largo de un segmento que tuviera el doble de ese valor. Cosa que espero no haber errado… porque … ¡¡ya sería el colmo en no lograr bien un duplo!!
4) Tampoco resulta mala la conclusión o derivación realizada a partir de conocer el valor del supuesto MN sobre su posición… pero claro… aquí está el quid del caso. Si estuviera MN donde supuestamente debe estar para garantizar su medida, el romboide logrado con esas dimensiones determinadas cumpliría con el valor del área pretendida, pero la posición de sus lados… ¡Vaya si están lejos del contorno del triángulo anterior y de las líneas que determinarían las líneas MB y NC! Cosa que se escapó… y que no se detectó además porque los otros dos triángulos, no fueron verificados en su superficie ni se logró un esquema total como el que me enviás (de hecho no tengo con qué hacerlo porque no cuento con soft adecuado… ni uno siquiera complejo).

5) Indudablemente las afirmaciones llevaron a que tanto el triángulo BOC como el romboide MONA terminaran teniendo la misma superficie, pero se presentaban varias circunstancias no verificadas:
    a. Que la línea que determinaba los lados inferiores (según la presentación del dibujo) la zona correspondiente al romboide, no eran continuidad de las que formaban los lados superiores de la zona correspondiente al triángulo BOC, no pertenecían a la misma recta como era de esperarse o como se dio por supuesto.
    b. Que los otros dos triángulos que se conformaban con la división del área total del equilátero original, en verdad eran iguales, pero que la determinación de sus respectivas áreas no se logró haciendo el cálculo de su superficie sino por diferencia con el total, lo que numéricamente llevaba a una conclusión supuestamente válida, sin percatarme que en verdad el área se mantenía en el valor pero con una forma de triángulos inviables de lograr con la división propuesta.

Quiero señalar que el archivo aportado, me pareció sumamente rico para el caso, lo que me induce a pensar del potencial que puede brindar para múltiples propuestas de trabajo y aprendizaje para los alumnos, suponiendo que no requiere demasiado esfuerzo el que nosotros mismos seamos buenos estudiantes de sus bondades y manejo. La claridad con que se observa la conclusión en este caso, evitaría incurrir en enormes esfuerzos para hacerlo comprender. De hecho hasta que no lo vi (ya que me resistí a verlo hasta que no hubiera hecho mi reanálisis del problema), no podía imaginarme la forma tan clara con que se expuso la situación con su uso.
Y si se me permite… cuando elaboré a mano alzada el problema, pensé en hacer una traza del recorrido de los valores de área de cada triángulo para ver el punto común o de corte entre ambas… pero lo abandoné porque me pareció sumamente complejo para exponerlo en un curso donde como he

comentado se trabaja bastante poco con vínculos entre lo algebraico y lo geométrico… Y que no suene a justificación de mi imbecilidad…



Conclusiones primarias:

a) No hay la más mínima excusa para justificar el haber caído en esta "trampa".

b) Cada vez más creo que las herramientas visuales permiten percibir un problema con una óptica absolutamente potente y complementaria sin duda para orientar los razonamientos aún con apariencia de haber sido realizados en secuencias sumamente lógicas.

c) Experiencias como ésta son las que invitan a escuchar a los alumnos para seguir sus razonamientos cuando intentan resolver una situación que uno tiene por conocida, y muchas veces intenta reorientarlos hacia sus propios conocimientos del caso que se les plantea, lo que por ahí impide encontrar errores que bien podrían minimizarse, o al menos señalarse para evitar la recomisión de los mismos en el futuro, con comentarios adecuados al descubrirlos. Y que esto no implique derivar que no se los siga y escuche… sino que no siempre uno puede hacer una atención personalizada frente a realidades áulicas e institucionales como las que ya he comentado y que no cito para evitar reiteraciones indebidas.

d) Conclusiones como las observadas al realizar este trabajo invitan a redoblar esfuerzos para imbuir a los alumnos de la necesidad de agotar las posibles verificaciones de un problema, por todos los caminos que sean viables, tratando incluso de encontrar comprobaciones cruzadas de modo tal que las unas pongan en juicio a otras posibles.

(18) *(**E**)*: *Descargue el software "Smart board software" (la dirección se encuentra en el documento base, o bien utilice un buscador en internet. Explore. Experimente. Vea su potencial didáctico.*

**No hubo respuesta del participante**

## Análisis de la entrevista con Julio

### El papel de la tecnología

Inicialmente, no hay una postura explícita en cuanto a uso que debe darse a la tecnología en el salón de clases, pero más adelante manifiesta una serie de ideas que permiten contextualizar sus apreciaciones, (8) y (10), en este rubro. Primero; establece que una característica de la tecnología es que debe elegirse de manera tal que aporte elementos para la mejora de aprendizajes, bajo objetivos claramente establecidos. Segundo; enfatiza la necesidad de adecuar las propuestas didácticas que incorporan el uso de tecnología, en función de las características del medio escolar en que se pretenden ser utilizados. Tercero; que en la actualidad, el maestro es superado técnicamente por sus alumnos en el uso de artefactos tecnológicos.

### El problema de las cuatro secciones

Julio empieza a atacar el problema, delimitando los valores de la altura de un triángulo equilátero de lado "l", (5), obteniendo la expresión algebraica correcta. También obtiene correctamente la expresión que determina el área de este triángulo en función de la longitud de su lado.

Con esta información, determina que la sección BOC debe abarcar la cuarta parte de la superficie del triángulo original, lo que lo lleva a establecer la siguiente relación:

$$\text{Área BOC} = \frac{l \text{ x } h'}{2} = \frac{1}{4} \text{ x Área ABC} = \frac{1}{4} \text{ x } \frac{\sqrt{3}\, l^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\, l^2}{16}$$

Donde h' es la altura del triángulo BOC.

Despeja h' y obtiene la altura de este triángulo:

$$h' = \frac{\sqrt{3}\; l^2\; 2}{16\, l} = \frac{\sqrt{3}\, l}{8}$$

Sin embargo, observa que esta relación implica que

$$h' = \frac{h}{4}$$

Reconoce que la determinación del área de BOC es simultánea a la de la sección MONA. Esta sección la divide en MOA y NOA:

$$\text{Área MONA} = 2 \text{ x Área MOA} = 2 \text{ x} \frac{h'' \text{ x } \frac{3}{4} \frac{\sqrt{3}\,l}{2}}{2} = \frac{h''\,3\sqrt{3}\,l}{8}$$

Donde h’’ la define como la altura del triángulo MOA.

En este momento, Julio decide tomar al lado OA como ¾ partes de h, fundamentando tal decisión en que h’ es la cuarta parte de h.

Sin embargo, en este momento da por hecho que con OA= ¾ h, se cumple *necesariamente* que el triángulo MOA abarca la octava parte del triángulo ABC:

$$\frac{\sqrt{3}\,l^2}{16} = \frac{h''\,3\sqrt{3}\,l}{8} \rightarrow h'' = \frac{\sqrt{3}\,l^2\,8}{16 \text{ x } 3\sqrt{3}\,l} = \frac{l}{6}$$

Después, observa que h’’ = ½ MN, de donde obtiene:

$$MN = 2 \text{ x } h'' = 2 \text{ x} \frac{l}{6} = \frac{1}{3} l = \frac{l}{3}$$

Es decir, que el segmento MN es una tercera parte de la longitud del lado del triángulo original.

Después reconoce que el hecho de que MN sea paralelo a BC, implica que AMN también sea equilátero. Hecho que le permite afirmar que M debe estar a 1/3 de distancia de A

Julio analiza por separado algunas condiciones del problema planteado y establece *de facto*, que cumplen simultáneamente la condición de la equivalencia de áreas. Esto lo lleva a establecer relaciones erróneas entre longitudes que se determinan en la construcción del problema.

Más adelante, intenta demostrar de manera concreta sus aseveraciones utilizando un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

Obtiene la altura:

$$h = \frac{\sqrt{3}\,12}{2} = 6\sqrt{3}$$

El área total:

$$\frac{12 \text{ x } 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

Y el área que debería abarcar cada sección:

$$\frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Supone que la altura de BOC es ¼ de la longitud el área de ABC y obtiene su área:

$$\text{Sup. BOC} = \frac{12 \text{ x } \frac{6\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Efectivamente, esta área es la cuarta parte del área total, lo que satisface parcialmente las condiciones del problema planteado, sin embargo ello no garantiza que las otras secciones lo satisfagan simultáneamente.

Cuando intenta obtener el área de MONA, da *por hecho* de que ésta abarca la cuarta parte del área de ABC, y que MN = 4 cm., lo que le lleva a una deducción no válida, puesto que esta relación no está en función de la posición de x, sino del lugar que éste ocupa cuando BOC satisface de manera individual la condición establecida.

A partir de esta conclusión, determina por que fácilmente se puede comprobar que, primero, BOM y CON son congruentes y que ambos abarcan, por separado, la cuarta parte del área del triángulo ABC.

Se hizo esta observación (6) a Julio, y se le mostró una versión del problema, cuando el triángulo equilátero tiene sus lados de 12 cm. En esta construcción, se marcaron las longitudes y áreas de las cuatro secciones involucradas.(Ilustración 19)

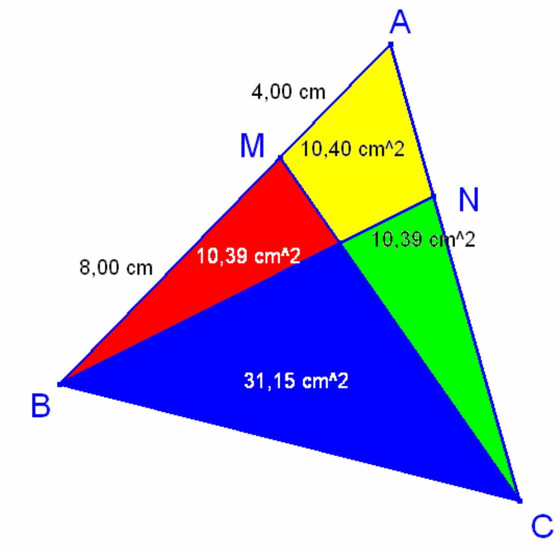



**Ilustración 19**

Aunque la imagen se obtuvo de un modelo dinámico creado en Cabri Géomètre, no se le hizo saber en ese momento, puesto que solo era pertinente iniciar la discusión a partir de modelos estáticos que simularan lo hecho con lápiz y papel.

Cuando Julio revisa el video de las cuatro secciones, retoma sus afirmaciones y reflexionando en los procedimientos algebraicos que ha establecido, reformula sus consideraciones hasta encontrar las causas que le han llevado a una conclusión no válida. (17)

Reconoce que ha abordado el problema con premisas fundamentadas pero de las que fundamente su carácter de condición necesaria pero no suficiente. De manera particular, identifica que el área del triángulo MOA tiene un lado definido por la longitud asignada a otra sección, pero no reparó en que la longitud de la altura de esta triángulo estaba ya fuera de las condiciones establecidas en el problema.

En el renglón 17, inciso 4), Julio refiere que no está familiarizado con el uso de software de geometría dinámica, lo que le obligó a delimitarse a una solución algebraica al problema planteado.

**El triángulo en el círculo**

Julio obtiene, (14), la expresión algebraica que establece la relación funcional entre el área del triángulo BMN y la longitud de x:

$$\text{Área de MNB} = \frac{2\sqrt{(2r-x)x}\,(2r-x)}{2} = \sqrt{(2r-x)x}\,(2r-x) = (2r-x)^{3/2}\ x^{1/2}$$

Con ésta expresión, recurre a conceptos de cálculo diferencial para obtener la derivada de esta función, que le permita obtener el máximo del área buscada:

$$A' = -\frac{3}{2}(2r-x)^{1/2}\ x^{1/2} + \frac{1}{2}(2r-x)^{3/2}\ x^{-1/2}$$

$$A' = \frac{1}{2}(2r-x)^{1/2}\ x^{-1/2}\left[-3x + (2r-x)\right] = \frac{1}{2}(2r-x)^{1/2}\ x^{-1/2}\left[-4x + 2r)\right]$$

A partir de esta expresión, determina que A'=0 implica que los factores (2r-x) o (-4x+2r) sean nulos de manera independiente o de manera simultánea. Esto le lleva a la aseveración correcta de que el área máxima se alcanza en x=r/2 Julio muestra la relevancia de no perder de vista el dominio de la función que se generó para solucionar el problema.

En este tratamiento que da Julio a la información del problema, en la que le basta el uso de lápiz y papel; es necesario enfatizar que su dominio algebraico le basta para ofrecer una respuesta acertada al problema. En este sentido, se puede concluir que no requiere de instrumentos adicionales para sustentar sus afirmaciones, dado que expresa sus ideas de manera fluida y categórica.

## *Estudio de caso con Soledad*

Soledad *(**S**)* es profesora de primaria y reside en España. La siguiente sección es una transcripción de los archivos intercambiables que se adjuntaban en la plataforma informática del taller; y en él se muestra su posición respecto a los problemas planteados.

En este intercambio en tiempo diferido, se enviaron comentarios para crear un ambiente de discusión en el taller y en este documento se han registrado en color rojo.

Los comentarios que intentan resaltar aspectos relevantes para el análisis están registrados en color azul y son posteriores a la discusión propia del taller.

- **Bloque 1**

(1) *(**E**)*: *Descargue el documento anexo y de una revisión superficial.*

(2) *(**E**)*: *Observe a detalle la caricatura de la página 4. Dé una opinión al respecto.*

(3) *(**S**)*: Veo que el docente hace uso de la computadora como otro recurso didáctico más a emplear en el aula con sus alumnos/ as. Si éste lo hace es porque ve en ella, un buen instrumento o recurso didáctico para poder emplear en el aula; ya que le beneficiará a sus alumnos /as en la interiorización y asimilación de los nuevos contenidos a transmitir por él.

(4) (***E***) **Supongamos que el objetivo del profesor sea el de lograr que el alumno comprenda que 1+1=2. ¿Cuál es el papel de la tecnología en el momento planteado por la caricatura?¿Se hubiera logrado el mismo aprendizaje sin haberla utilizado?¿Cuándo es necesario recurrir a la tecnolgía? ¿Cuándo es pertinente hacerlo?**

(5) *(**E**)*: *Reflexione sobre el uso de la tecnología en el aula y compártanos su experiencia.*

(6) *(**S**)*: <u>Uso de la tecnología en el aula</u>: El uso de la tecnología en el aula lo veo muy esencial, eficaz, bueno... para cualquier transmisión de unos determinados contenidos de una unidad didáctica , ya que con ella; se desarrollarán un conjunto de habilidades, destrezas...., muy esenciales para el desarrollo de cualquier persona.

He trabajado con niños de primaria usando la computadora para enseñarles office y la verdad es que me encantó la experiencia ; ellos se divertían por medio de juegos didácticos para aprender office .

(7) (***E***) **Sería enriquecedor para el foro, que nos platicara con más detalle esta experiencia. Indudablemente que incrementaría nuestra visión al respecto.**

(8) *(**E**)*: *Resuelva "El problema de las cuatro secciones" con lápiz y papel. (Propuestas de solución opcional)*

(9) *(**S**)*: *Sea ABC un triángulo equilátero. Se marca un punto M sobre AB y se traza una paralela a BC que pasa por M. La intersección de esta paralela con BC la llamaremos N. Se traza el segmento BN y el segmento MC, cuya intersección es O. El triángulo ABC ha quedado dividido en cuatro secciones: BOM, MONA, NOC y BOC.A la distancia entre B y M la llamaremos x. Como M es arbitrario, las áreas de las cuatro secciones dependen de x. Encuentre el valor de x donde las cuatro secciones tienen la misma área.*

Dibujo un triángulo equilátero y marco M más cerca de A que de B.

Los triángulos BOM y CON son iguales.

Dibujo un segundo triángulo equilátero, ahora marqué M más próximo a B que a A.

Implica que M no esté próximo a A ni a B.

El área de cada una de las 4 figuras consideradas tenía que ser la cuarta parte del área del triángulo ABC, entonces el triángulo BCO solución lo podía hallar  la altura respecto al lado BC tenía que ser la cuarta parte de la altura de ABC. .

Pero para esa posición me pareció que el triángulo BOM no tenía la misma área que BCO . EL PROBLEMA NO TIENE SOLUCIÓN porque los triángulos BCO y BOM tienen la misma altura respecto al vértice B, entonces para que tengan la misma área deberían tener bases CO y OM iguales, O tendría que ser punto medio de CM. Pero esto nunca ocurre salvo cuando O es el punto medio de BC (donde no tendríamos las 4 regiones).

(10) (***E***)**¿Por qué dibujó a M más cerca de A?**

**¿Cómo fundamenta su conclusión de que M no esté "próximo a A ni a B"?**

**¿Necesariamente debe partir del triángulo BCO?**

**¿Cómo se justificaría el hecho de considerar la relación proporcional entre las alturas que usted describe?**

- ***Bloque 2***

(11) *(**E**)*: *Lea el capítulo "El sentido pedagógico del uso de la tecnología", del documento base. Escriba su opinión sobre el sentido pedagógico que debe tener la tecnología en el aula.*

(12) *(**S**)*: Si hablamos de usar las tecnologías en el aula, es porque se introduce ésta como un recurso o material didáctico en el aula, en el que el docente debe hacer uso de ella como tal a la hora de desarrollar sus actividades en el aula ; ya que con la incorporación de ella propiciará en los alumnos /as una mejor asimilación e interiorización de los nuevos contenidos  que se les esté transmitiendo ( una unidad didáctica que les esté explicando ), les ayudará a  desarrollar unas  determinadas habilidades y destrezas que no  se desarrollarían si éstas no se llegan  a emplear en el

aula porque son esenciales en el desarrollo de sus alumnos /as, a potenciar o crear aprendizajes significativos; así como el aprendizaje colaborativo, a tener la propia iniciativa de respuestas por parte de los alumnos /as a decir lo que creen sin tener miedo al error , a motivarlos a que busquen la solución de un posible problema a investigar –resolver por ellos /as mismos /as, él cuál es el punto de partida de la interiorización de los nuevos contenidos a aprender .

(13) *(**E**)*: *Observe las actividades propuestas (no las secuencias didácticas) en el documento que hacen referencia a tópicos de matemáticas. Analícelas y opine al respecto. Recuerde que dichas actividades están destinadas a alumnos de educación secundaria.*

(14) *(**S**)*: Actividades propuestas en el documento en el documento que hacen referencia a tópicos de matemáticas .Analícelas y opine al respecto.

- ERASE UN GRAFO : Creo que no se pueden trazar todas las líneas de un solo trazo y sin repetir líneas aunque se use el plumón electrónico.

-2D, 3D O VISCEVERSA :Me parece una actividad interesante a plantear al alumnado y a resolver por ellos /as mismos /as ya que con el programa informático al que hace referencia la actividad, podrán visualizarlo, analizarlo, comprenderlo.... mejor y sabrán deducir las respuestas correctas par lo que se les está pidiendo .

- Emulador de la calculadora científica TI 92 o TI 02 plus : Me parece muy importante para el estudio de las matemáticas.
- MELANCOLIA PERFECTA : Me parece muy adecuada la actividad propuesta a los alumnos /as porque así con su realización podrán encontrar y conocer algunas relaciones geométricas .

(15) *(**E**)*: *Descargue el programa POLY32, de la siguiente dirección:* *http://www.peda.com/* *Explore, analice su potencial didáctico. Explique cómo podrá usarlo usted en una clase de matemáticas.*

(16) ***(S)***:  El programa POLY32 lo podría usar en una clase de matemáticas al tener que explicar a los alumnos /as una unidad didáctica como la geometría, valiéndome de la tecnología en el aula, empleando el programa informático que se cita; (Poly 32 ) a través de actividades didácticas que propicien el aprendizaje significativo, partiendo de un posible problema a investigar –resolver por los alumnos /as; bien formulado por ellos mismos o bien por mí; como sería por ejemplo por mí el siguiente : ¿Quién podría de vosotros / as decirme en qué se diferencia un cubo de un octaedro?.Una vez que ellos /as diesen las primeras respuestas; podría hacer uso de este programa para crear nuevas ideas , confrontar nuevos aprendizajes y avanzar en el proceso de enseñanza –aprendizaje de los contenidos(conceptuales, procedimentales y actitudinales ) a aprender englobados en la unidad didáctica que antes mencioné; la de geometría.

(17) ***(E)***: *Resuelva el problema "El triángulo en el círculo".*

(18) ***(S)***: No sé qué hacer con el problema. No se me ocurre nada

- ***Bloque 3***

(19) ***(E)***: *Descargue el programa* ***reticular****. Este, es un interactivo que permite visualizar un espectro de temas relacionados a lo largo del mapa curricular (hay que aclarar que en México se ha echado a andar un nuevo programa de estudios: el plan 2006, cuyos contenidos son abordados por este software). Seleccione un tema (dando un clic en alguno de ellos) y analice su espectro temático, sobre todo en la secuencia de los conocimientos y habilidades que ese apartado pretende abordar. Describa las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido y cómo la tecnología puede tener un papel determinante.*

(20) ***(S)***: He seleccionado el tema :Números naturales (1.1)y al pinchar en él; salen marcados los temas : 1.2 y 4.1.Los conocimientos que pretende abordar son :

Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarla con la de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales .

Las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido podrían ser las siguientes :

- Saber algunos de los conceptos previos que conlleva el inicio del estudio de la unidad como por ejemplo :
- Los números naturales y los números enteros. La ordenación y la representación de números enteros en la recta numérica.
- Las operaciones con los números y la jerarquía de las mismas...
- -Tener claros que los *CONTENIDOS que se deben interiorizar en la unidad didáctica son tres y se dividen en:*
- **Conceptos :**
- Múltiplos y divisores. Números primos y compuestos. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Fracciones, decimales y porcentajes.
- Ordenación y representación gráfica de números no enteros.
- Operaciones con fracciones y decimales.
- Aproximación y estimación de cantidades.
- Notación científica.
- Números irracionales.

**Procedimientos.**

Descomposición factorial de un número mediante el algoritmo de la división.

Resolución de problemas de la vida cotidiana aplicando el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Identificación y utilización de una fracción como proporción, operador, decimal y porcentaje.

Reconocimiento y clasificación, por diversos métodos, de fracciones equivalentes.

Ordenación y representación en la recta numérica de fracciones y decimales.

Cálculo de operaciones con fracciones y decimales utilizando la expresión más sencilla y el grado de aproximación adecuado en cada caso, teniendo en cuenta el error que se comete y la jerarquía de las operaciones.

Utilización del cálculo mental, de la estimación, de los algoritmos con lápiz y papel y/o de la calculadora, dependiendo de la situación en estudio.

Cálculo de potencias de exponente entero con el fin de utilizar la notación científica para los casos de números muy grandes o muy pequeños.

Realización de raíces y operaciones sencillas con números irracionales.

**Actitudes**

Valoración de las aportaciones del mundo de los números, sus propiedades, operaciones que pueden realizarse con ellos en las distintas ciencias y en la vida cotidiana.

Curiosidad e interés por estimar cantidades y utilizar el cálculo mental en todas las oportunidades que no presenten excesiva dificultad.

Predisposición favorable a buscar la exactitud numérica, o el grado de aproximación adecuado, a la cuestión que se estudia y al error cometido en cada caso, por defecto o por exceso.

Aprecio y valoración crítica de la calculadora como instrumento que facilita numerosos cálculos .

Para estudiar esta unidad didáctica , la tecnología puede jugar un papel importante ya que con ella; se pueden incorporar algunos programas informáticos como : libros interactivos ( http://www.i-matematicas.com/Descartes/Libro/index.htm) y los de refuerzo de matemáticas :

http://www.iesdolmendesoto.org/wiki/index.php/Refuerzo_de_Matem%C3%A1ticas_1%C2%BA_de_ESO ) , que sin duda alguna como material o recurso didáctico a emplear en el aula por el docente con la ayuda de las nuevas tecnologías y acceso a internet ; los alumnos /as interiorizarán y aprenderán mejor los contenidos que en ella hay les serán mucho más a menos de aprender .

(21) ***(E)***: *Observe el video* ***Las cuatro secciones*** *disponible en la sección DOCUMENTS. Vuelva a intentar una solución al problema. Describa con detalle: ¿El video reformuló su percepción del problema?*

(22) ***(S)***: El vídeo ha estado muy interesante y creo que sí puede haber parábolas que formen un triángulo equilátero porque depende de la posición, lugar... donde se encuentre éste para formarlo en relación a los lados que se escojan, áreas a tratar y puntos a mover.

(23) ***(E)***: *Descargue el software "Smart board software" (la dirección se encuentra en el documento base, o bien utilice un buscador en internet. Explore. Experimente. Vea su potencial didáctico.*

(24) ***(S)***: Potencial didáctico :Es un programa muy útil y eficaz para cualquier contenido de una unidad didáctica a dar en el aula, ya que sirve como recurso o material didáctico a emplear sin estar conectado a internet como con conexión, ya que permite incluir recursos en línea; esto enriquece más la unidad , aporta más motivación e interés a los alumnos por investigar y ver lo que se les está enseñando y transmitiendo, permite aportar galerías, videos... ; además de tener las herramientas básicas y esenciales de otros muchos programas informáticos .

## Análisis de la entrevista con Soledad

### El papel de la tecnología

Soledad asume que la tecnología utilizada en cualquier momento del proceso pedagógico, inevitablemente incidirá en la mejora de los aprendizajes esperados en los estudiantes, (3); y que el uso de los recursos tecnológicos por ellos mismos, serán capaces de desarrollar habilidades y destrezas en determinados contenidos de una unidad didáctica.

Llama la atención que Soledad se refiera al papel del maestro en el salón de clases, (12), en el siguiente afirmación:

"…ya que con la incorporación de ella propiciará en los alumnos /as una mejor asimilación e interiorización de los nuevos contenidos que se les esté transmitiendo ( una unidad didáctica que les esté explicando )"

unidad didáctica que les esté explicando.

O como en el renglón 16:

"El programa POLY32 lo podría usar en una clase de matemáticas al tener que explicar a los alumnos /as una unidad didáctica como la geometría, valiéndome de la tecnología en el aula,…"

Sin embargo, algunas referencias en torno a ambientes virtuales que propone (20) dan cuenta de que se ha involucrado de manera empírica con esta incorporación de entornos virtuales en su labor docente.

### El problema de las cuatro secciones

El esquema de presentación de las ideas generadas en la búsqueda de la solución al problema de las cuatro secciones, es idéntico al proporcionado por Mario. Este evento es desafortunado en términos de análisis porque reduce la capacidad de exploración en los procesos que se generan en los diferentes actores. Además, no hubo respuesta a las cuestiones planteadas en el renglón 10.

**El triángulo en el círculo**

Soledad reconoce que no posee las herramientas matemáticas que le permitan afrontar el problema del triángulo en el círculo, (18), lo que permite inferir que las propuesta de solución mostrada en (9), no son sostenibles en su situación.

## *Estudio de caso con Yacir*

Yacir ***(Y)***, es miembro del Instituto de Profesores de Artigas, Uruguay. La siguiente sección, es una transcripción de los archivos intercambiables que se adjuntaban en la plataforma informática del taller; y en él se muestra su posición respecto a los problemas planteados.

En este intercambio en tiempo diferido, se enviaron comentarios para crear un ambiente de discusión en el taller y en este documento se han registrado en color rojo.

Los comentarios que intentan resaltar aspectos relevantes para el análisis están registrados en color azul y son posteriores a la discusión propia del taller.

- **Bloque 1**

(1) ***(E)***: *Descargue el documento anexo y de una revisión superficial.*

(2) ***(E)***: *Observe a detalle la caricatura de la página 4. Dé una opinión al respecto.*

(3) ***(Y)***: Considero que la caricatura muestra un mal uso de la tecnología en el aula. Supongo que la idea es que luego de leer el material el docente haga un buen uso de la tecnología y no la que muestra la caricatura. En la caricatura se muestra un docente que ya por el sombrero y el guardapolvo que lleva puesto indica una diferencia, una distancia, con el estudiante. Esta distancia también es generada por el uso de la tecnología, que en este caso, en vez de ser una herramienta para, junto al estudiante, generar conocimiento, parece distanciar al docente del estudiante, muestra dos “aparatos” que separan al docente del estudiante. El conocimiento del profesor parece ser transmitido al estudiante, sin que este último participe, intentando hacerlo menos tradicional imponiendo, sin ningún beneficio, dos aparatos innecesarios.

A modo de síntesis considero que la caricatura intentar mostrar graciosamente un pésimo uso de herramientas que son muy poderosas para la enseñanza, en particular, de la matemática.

(4) (***E***) **Comparto su opinión en cuanto a la subutilización de la tecnología. Efectivamente, en las condiciones que la caricatura muestra, no resulta ser una *herramienta mediadora* entre el estudiante y el conocimiento.**

(5) ***(E)***: *Reflexione sobre el uso de la tecnología en el aula y compártanos su experiencia.*

(6) ***(Y)***: Hace unos años tuve la posibilidad de trabajar con un grupo de primero (12 años) el tema funciones polinómicas de primer grado en la sala de informática, con el otro grupo no pude ir a dicha sala por un tema de horarios.

Con el segundo grupo graficamos con lápiz y papel distintas funciones polinómicas de primer grado observando las relaciones entre sus gráficos y el coeficiente principal, y el término independiente. Los estudiantes sólo trabajaron con las funciones que yo les brindaba.

En el otro grupo se trabajó los mismos conceptos, analizar la variación del el gráfico de $f: R \to R / f(x) = ax + b, a \neq 0$, al variar a y b. Surgieron las mismas ideas que en el grupo anterior, pero lo nuevo fue que ellos, a diferencia del otro grupo, inventaron otras funciones a parte de las que yo les proporcioné.

Surgieron, a modo de ejemplo, funciones del tipo: $f: R \to R / f(x) = 5x + 3 + 4x + 5$, y $f: R \to R / f(x) = 3x.2x + 4$. Esto permitió trabajar conceptos ya conocidos como suma de monomios semejantes, producto de monomios y conocer otras funciones, polinómicas de segundo grado, que no estaba planificado trabajar.

Creo que el uso de la computadora permitió que los estudiantes realizaran las actividades solicitadas y además que ellos investigaran, se hicieran preguntas y surgieran otros conceptos.

(7) *(**E**)*: *Resuelva "El problema de las cuatro secciones" con lápiz y papel. (Propuestas de solución opcional)*

(8) *(**Y**)*: Sea ABC un triángulo equilátero.

Se marca un punto M sobre AB y se traza una paralela a BC que pasa por M.

La intersección de esta paralela con CA la llamaremos N.

Se traza el segmento BN y el segmento MC, cuya intersección es O.

El triángulo ABC ha quedado dividido en cuatro secciones: BOM, MONA, NOC y BOC.

A la distancia entre B y M la llamaremos x.

Como M es arbitrario, las áreas de las cuatro secciones dependen de x.

Encuentre el valor de x donde las cuatro secciones tienen la misma área.

Van ideas:

(BMNC) es un trapecio isósceles, entonces la intersección de sus diagonales (O), pertenece a la mediatriz (AP) de sus lados paralelos.

Entonces:

- ✓ $O \in AP$, siendo P punto medio segmento BC.
- ✓ AP eje se simetría del BMNC

Los triángulos (MBO) y (ONC) son congruentes por lo tanto siempre tienen la misma área.

Son congruentes porque:

Los ángulos MOB y NOC iguales por ser opuestos por el vértice.

Los segmentos MO y ON son iguales por pertenecer O a la mediatriz de MN.

Los triángulos (OPB) y (OPC) son congruentes porque OP es eje de simetría del (OBC).

Sea t el área del (BOM), entonces área de (NOC) es t.

Si quiero que se cumpla que las cuatro secciones indicadas tengan igual área, él área de (BOC) deber ser también t, y a su vez t=área(ACB)/4.

Para ello el área de (BNC)=2t.   O sea que: área(ACB)/2  = área de (BNC)

Por otro lado área de (BNC)= BC. m /2    (m altura del (BNC) respecto a BC, o sea la medida de NT)

Área del (ABC)=BC. j /2    (j altura del (BAC) respecto a BC, o sea la medida de AP)

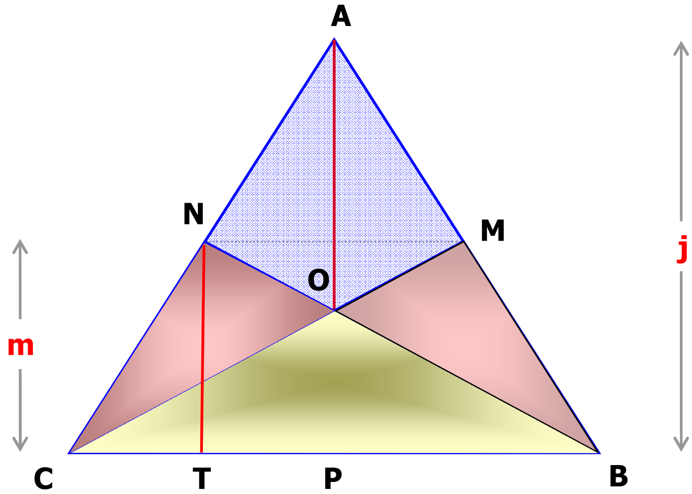
área(ACB)/2  = área de (BNC)

CB j / 4 = CB m /2

Entonces:  j/2  =  m

La medida de NT es la mitad de la de AP, entonces (por teorema de Thales en APC) MN es paralela media, N es punto medio de AC.  Entonces x es la mitad de la medida del lado del (ABC).

(9) (***E***) **Sonia y Yacir, sus ideas son interesantes. De acuerdo a ellas, tendríamos la siguiente imagen:**




**Ahora, solo falta que demuestre que el área de MONA=1/4 del área de ABC, y que ésta es igual al área de AOB…**

**Este comentario, que involucra a una participante más (Sonia), se obligó en consecuencia de haber recibido dos propuestas de solución digitalmente idénticos.**
**En estas circunstancias, se adoptó una postura imparcial y se decidió enviar una respuesta común a ambas participantes, con el objetivo de recabar información que permitiera identificar, de manera objetiva, a la autora original de estas ideas. Finalmente se llegó a la conclusión irrevocable de que las ideas originales son de Yacir.**

- ***Bloque 2***

(10) *(**E**)*: *Lea el capítulo "El sentido pedagógico del uso de la tecnología", del documento base. Escriba su opinión sobre el sentido pedagógico que debe tener la tecnología en el aula.*

(11) *(**Y**)*: En cuanto al aprendizaje significativo de Ausubel y su visión del trabajo con las computadoras comparto la visión de las posibilidades que presentan las computadoras en la enseñanza en relación a hacer posible el control de muchas variables en forma simultánea, en cuanto al problema que menciona: "…que uno de los principales problemas de la enseñanza utilizando la computadora personal radica en que no proporciona interacción de los alumnos entre sí ni de éstos con el profesor" considero que no es tal. La computadora en el aula debe ser usada como una herramienta que posibilite el aprendizaje en el aula, en interacción con docente y con compañeros. Debe permitir, por ejemplo, realizar conjeturas que luego deberán ser validadas al nivel matemático del curso o por el contrario descartadas con contraejemplos. O sea la computadora en la clase será una herramienta al servicio de la visión del docente de lo que es "hacer matemática". "…el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no

son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar" (Moreno & Waldegg, 2002).

La matemática trabaja con objetos ideales, por lo tanto necesitan ser representados, tanto para trabajar con ellos como para comunicar nuestras ideas a los demás. Es por ello la importancia de los distintos registros de representación de los cuales el computador permite trabajar ricamente varios de ellos. Que el estudiante pueda representar el objeto en distintos registros le permitirá por un lado diferenciar el objeto (ideal) de su representación y por otro enriquecer la idea del objeto y poder elegir la representación adecuada para cada caso en que se ponga en juego dicho concepto. En este sentido la computadora juega un papel fundamental permitiendo obtener rápidamente distintas representaciones e inclusive en forma dinámica, observando variaciones del objeto en función de las variaciones de ciertos parámetros.

Muchas veces los docentes son reacios al uso de esta tecnología, por miedo a que el estudiante no "piense" o no "aprenda". Ahora, ¿un estudiante aprende porque conoce algunas tablas para derivar funciones y las aplica? ¿o aprende al saber qué es la derivada y qué cambios genera en la función? Me pregunto, ¿cómo se puede pensar una clase de análisis sin trabajar con el "derive" o algún programa similar? Es como pensar que hoy en día no se use la calculadora para aproximar $\sqrt{2}$ y se espere que se haga con papel y lápiz, ¿es eso hacer matemática?

(12) *(**E**)*: *Observe las actividades propuestas (no las secuencias didácticas) en el documento que hacen referencia a tópicos de matemáticas. Analícelas y opine al respecto. Recuerde que dichas actividades están destinadas a alumnos de educación secundaria.*

(13) ***(Y)***: Las actividades propuestas son más que interesantes, atragantes tanto para estudiantes como para docentes. Algunas de ellas, en principio, parecen no relacionadas con la matemática, pero las considero de gran potencial para trabajar con otras materias y mostrar alguna de las aplicaciones de las matemática y ayuda a otra áreas.

Por ejemplo Google Earth: permite trabajar con geografía, historia, etc. Buscar cierto lugar en el mundo, conocer aspectos de su historia y su presente, utilizar escalas para determinar distancias entre ese lugar y otro, etc. Calcular costos de un viaje desde la escuela a ese lugar, realizar un plan de viaje, etc.

(14) ***(E)***: *Descargue el programa POLY32, de la siguiente dirección: http://www.peda.com/ Explore, analice su potencial didáctico. Explique cómo podrá usarlo usted en una clase de matemáticas.*

(15) ***(Y)***: Dado que es la primera vez que interactúo con este programa considero que sólo puedo presentar algunas ideas que, por supuesto, distan de realizar un total aprovechamiento del mismo.

Considero que este programa puede ser trabajado en la escuela, en secundaria y en formación de maestros, con actividades adecuadas a cada nivel.

Pensando una clase para secundaria:

Trabajaría en una primera instancia en base a los sólidos Platónicos:

1) El estudiante puede interactuar con el sólido viendo su imagen tridimensional, su desarrollo en figuras planas y la relación entre ambas.

**Las imágenes mostradas son las representaciones en perspectiva y “desarrollo plano” de un tetraedro regular que en el software Poly32 hacen referencia como Tetraedro-sólido platónico. Las imágenes de la ilustración 20, fueron editadas para intentar sobresaltar los atributos que Yacir quiso mostrar.**

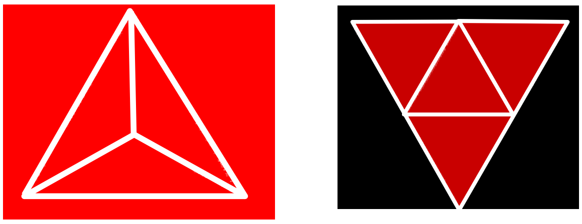


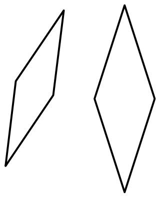
**Ilustración 20**

Esta actividad la trabajaría en forma conjunta con buscar en una caja “de sólidos” el que se corresponde con el representado en la computadora, manipularlo y colocarlo en una posición igual al representado en el computador. Esto permite relacionar una figura de tres dimensiones con su representación, en perspectiva, en dos dimensiones y con su desarrollo en el plano. Estas actividades permiten que el estudiante diferencie representación con objeto representado y profundice en la reglas, en general no explícitas, de cada registro de representación.

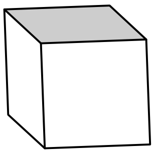
Tal vez le sumaría que los estudiantes construyeran en cartulina el desarrollo del sólido que está representado en el computador y lo plegaran. Nuevamente trabajaría en paralelo computador-otra representación.

Considero que las actividades anteriores permitirán al estudiante interactuar con esta nueva forma de representar estos objetos para que no ocurran situaciones como las reportadas en Olave y Testa (2007):

"Dados estos resultados nos interesó entrevistar a Laura para profundizar en el por qué de sus respuestas.

Al preguntarle por qué consideraba que  representaban cuadrados ella respondió:

Cuando dibujamos un cubo, la parte de arriba es un cuadrado y es así (haciendo referencia a los dibujos anteriores)."



Luego de que el estudiante se familiarice con este programa, y transite en forma fluida de un registro a otro, de representaciones en tres dimensiones a representaciones en dos, de la pantalla a "tocar" la figura, pasaría a trabajar otros sólidos ahora si desprendiéndome de la representación en hoja creada por los estudiantes y aprovechando al máximo las posibilidades que de "ver" e interactuar me da el programa.

(16) (***E***) **Excelente.**

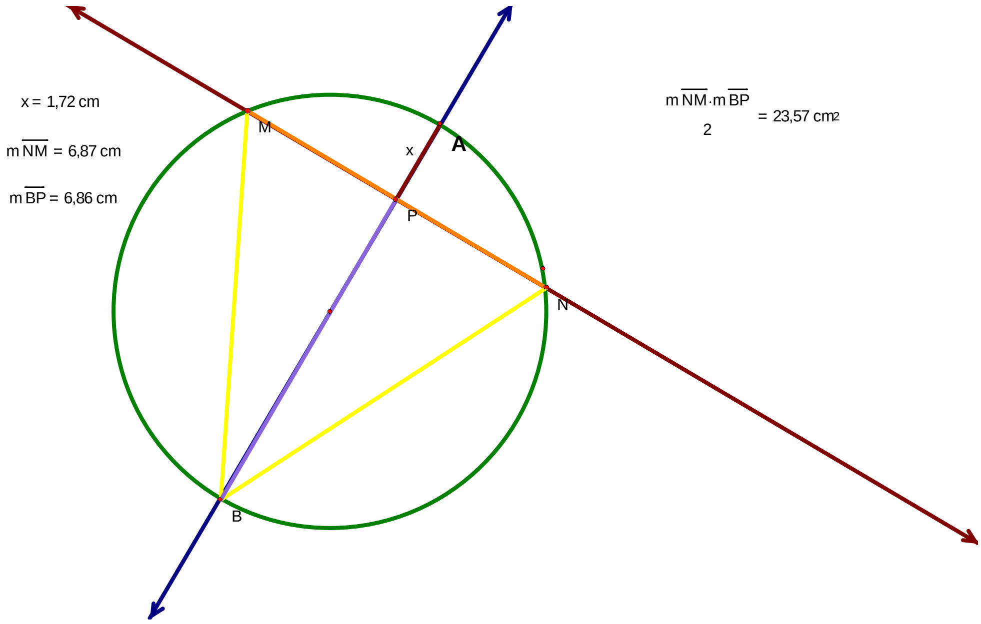
(17) *(**E**)*: *Resuelva el problema "El triángulo en el círculo".*

(18) *(**Y**)*:  Sea C una circunferencia de centro O y radio r.

Sea P un punto cualquiera del diámetro AB, desde donde se traza una cuerda MN perpendicular a dicho diámetro.

Sea x la distancia AP

Calcula el valor de x (en términos de r), para que el triángulo MBN tenga el área máxima.



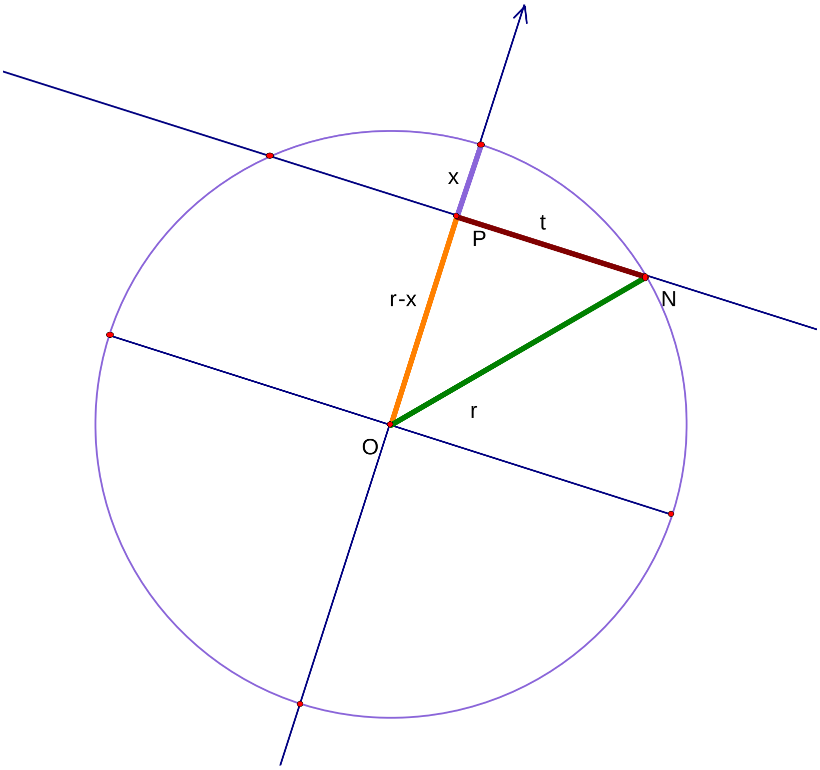

**Primera idea:**

Me gustó la idea que los estudiantes se enfrentaran a este problema y analizaran qué ocurría al variar x, o P. Para ello armé (lo deberían construir ellos)  un archivo en Sketchpad y podemos conjeturar un valor aproximado de x para que el área del triángulo MNB sea máxima.

Se adjunta archivo para poder mover el punto. Debemos "mover" con el Mouse el punto P y observar cómo cambian las relaciones establecidas.

Imagen fija:

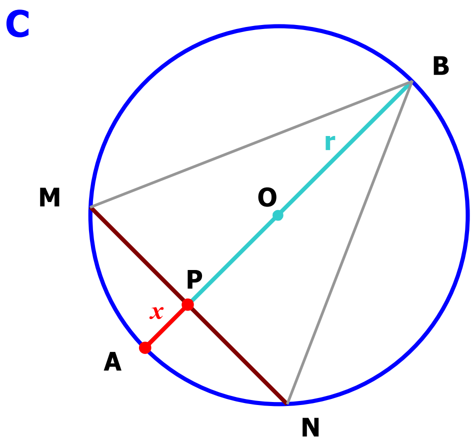
**Pasando al análisis:**




En el triángulo rectángulo OPN:

$r^2 = (r-x)^2 + t^2$ de donde $t = \sqrt{2rx - x^2}$

Por otro lado en el triángulo BMN:




MN = 2t

PB = PO + OB

PB = (r-x) + r

PB = 2r – x

Área de MNB= MN. PB / 2

Sea f la función que representa el área anterior al variar "x":

$f : (0,2r) \rightarrow R$ / f(x)= $\sqrt{2rx - x^2}$ (2r-x)

Debemos maximizar esta función:

$$f´(x)= \frac{1}{2\sqrt{2rx-x^2}}(2r-2x)(2r-x)+\sqrt{2rx-x^2}(-1)$$

$$f´(x)= \frac{(r-x)(2r-x)-(2rx-x^2)}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$f´(x)= \frac{(r-x)(2r-x)-(2rx-x^2)}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

$$f´(x)= \frac{2x^2-5rx+2r^2}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

Las raíces del numerador son: 2r y r/2, pero el dominio de la función es (0,2r) así que sólo nos sirve r/2 como raíz de f´.

Sg $f´(x)=0 \leftrightarrow \quad x=r/2$

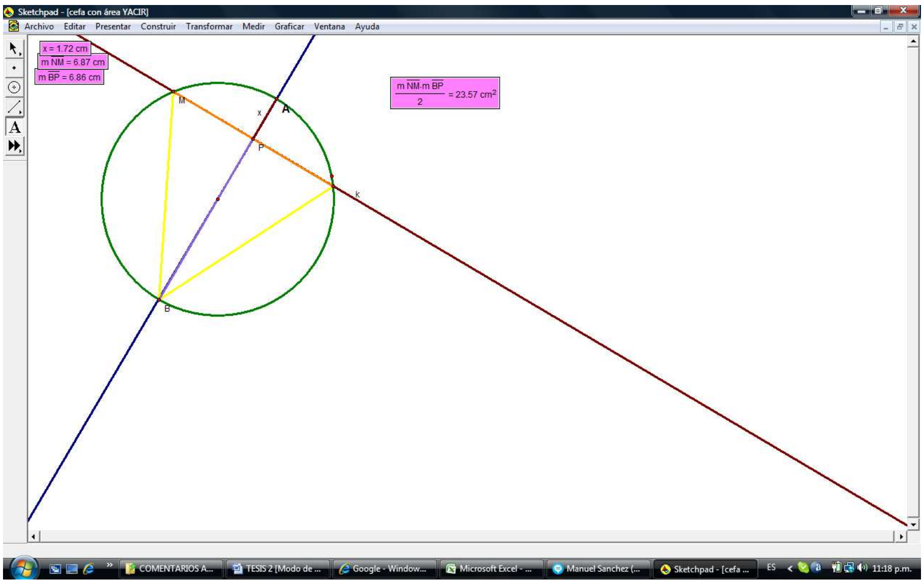
Sg $f´(x)<0 \leftrightarrow \quad r/2<x<2r$

Sg $f´(x)>0 \leftrightarrow \quad 0<x<r/2$

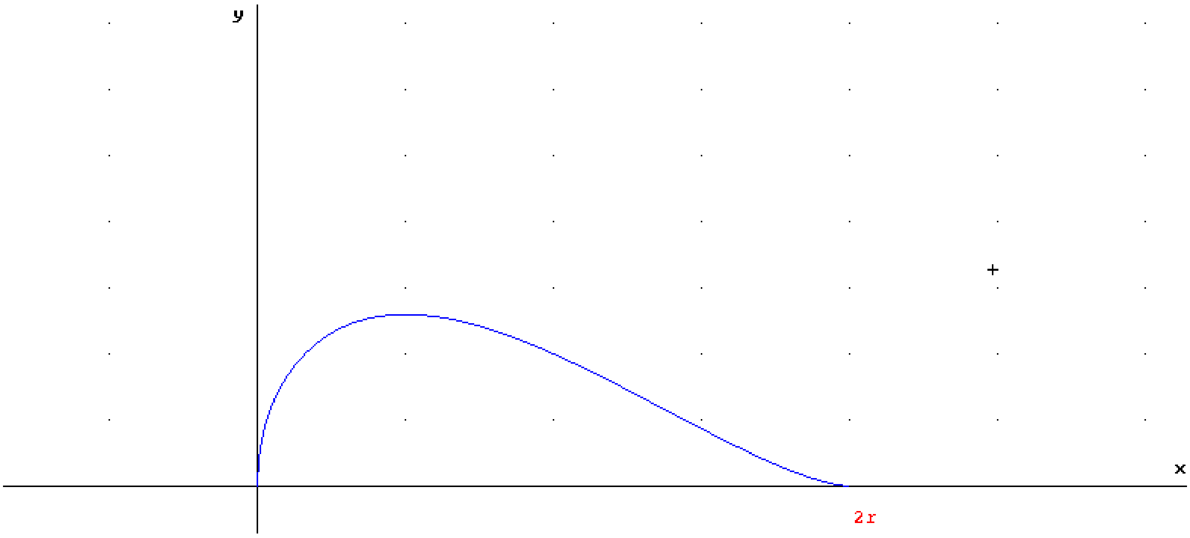
f presenta un máximo en r/2.

El área máxima del triángulo MNB se da para x=r/2.

Midamos ahora el radio de nuestra figura de análisis y comprobémoslo visualmente.



Veamos cómo es el gráfico de la función f




(19) (***E***)**¿Qué haría usted, si un estudiante omite esta restricción del dominio y está convencido que x=2r es solución al problema?**

- ***Bloque 3***

(20) *(**E**)*: *Descargue el programa **reticular**. Este, es un interactivo que permite visualizar un espectro de temas relacionados a lo largo del mapa curricular (hay que aclarar que en México se ha echado a andar un nuevo programa de estudios: el plan 2006, cuyos contenidos son abordados por este software). Seleccione un tema (dando un clic en alguno de ellos) y analice su espectro temático, sobre todo en la secuencia de los conocimientos y habilidades que ese apartado pretende abordar. Describa las características que debe tener un plan de clase que permita el estudio de este contenido y cómo la tecnología puede tener un papel determinante.*

**No hubo respuesta del participante**

(21) ***(E)***: *Observe el video **Las cuatro secciones** disponible en la sección DOCUMENTS. Vuelva a intentar una solución al problema. Describa con detalle: ¿El video reformuló su percepción del problema?*

**No hubo respuesta del participante**

(22) ***(E)***: *Descargue el software "Smart board software" (la dirección se encuentra en el documento base, o bien utilice un buscador en internet. Explore. Experimente. Vea su potencial didáctico.*

**No hubo respuesta del participante**

## Análisis de la entrevista con Yacir

### El papel de la tecnología

Yacir muestra una postura crítica, (3) en torno al uso pedagógico de las tecnología en los procesos propios de la adquisición de conocimientos. Define a la tecnología como una herramienta más del proceso pedagógico. Manifiesta también, conocimiento de softwares no propios para actividades matemáticas (13), pero que resultan herramientas mediadoras en otras asignaturas como Geografía.

Refiere que ha trabajado en el aula con entornos virtuales con resultados halagadores para su labor docente. Con un grupo piloto, alcanzó una profundidad no planeada a iniciativa de los propios alumnos (6), incluso del propio currículum establecido.

De los participantes, solo Yacir fundamentó su posición teórica respecto al papel mediador de la tecnología (11). Incluso, propone una situación didáctica con el uso del software Poly32, basado en resultados de reportes de investigación recientes.(15).

Describe con detalle, su experiencia con alumnos que rondan los 12 años, divididos en dos grupos: uno de ellos utilizando recursos tradicionales y el otro con apoyo de tecnología. El tema abordado fue *funciones polinómicas*, y el grupo sin recursos digitales no fue más allá de lo que se les pedía. En otro extremo, el grupo con herramientas informáticas, rebasó las expectativas de exploración logrando mejores aprendizajes.

### El problema de las cuatro secciones

La manera en que Yacir aborda el problema resulta muy interesante en sus planteamientos. Identifica al trapecio BMNC y con propiedades de simetría, determina la congruencia de NOC y MOB (8).

Reconoce que el área de BCN = área de NOC + área de COB, donde la altura de éste último debe ser la cuarta parte de la altura del triángulo ABC. Después afirma que BCN debe ser la mitad que la del triángulo ABC.

Aquí es donde pierde la dimensión del problema. Supo de *de facto* que ambas condiciones se están cumpliendo simultáneamente, lo que le conduce a la conclusión errónea de que cuando la altura del triángulo BNC es la mitad de la altura del triángulo ABC se resuelve el problema planteado. Es decir que cuando N es punto medio del lado respectivo.

Al igual que Julio, supone tácitamente el cumplimiento simultáneo de dos condiciones que contradicen la construcción misma del problema, lo que provoca una comprensión errónea que le lleva a resultados inconsistentes.

Como contraejemplo, basta con mostrar un triángulo equilátero como el de la ilustración 21.

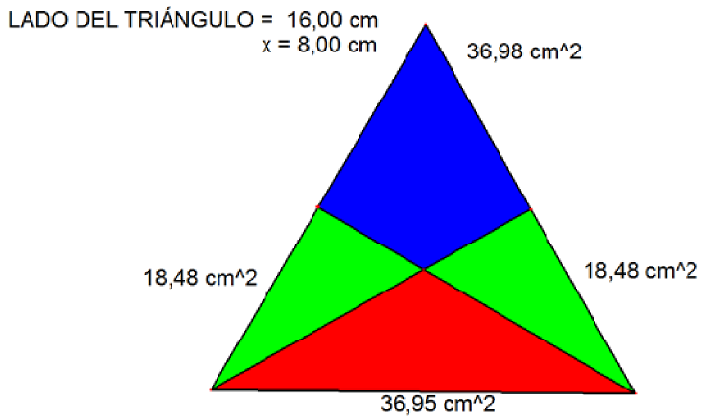



**Ilustración 21**

En él se ha determinado el valor de x ofrecido por Yacir, sin embargo, las áreas determinadas por este valor de x, distan de ser equivalentes.

Se debe aclarar en este momento, que este contraejemplo no se proporcionó a Yacir, por la dificultad presentada en la duplicidad del producto entregado. En ese momento, la participante decidió interrumpir la conversación lo que detuvo el intercambio de archivos.

La comunicación fue reanudada cuando los objetivos del taller se centraban en aspectos distintos a lo que concierne a este problema, por lo que no se le dio seguimiento a la discusión creada al respecto.

## El triángulo en el círculo

Yacir crea un modelo dinámico del problema utilizando el software The Geometer´s Sketchpad, del que fundamente su primer conjetura:

En la ilustración 22 puede apreciarse la presentación inicial de una construcción que Yacir nombró " cefa con área YACIR "[17], y cuya presentación inicial es:

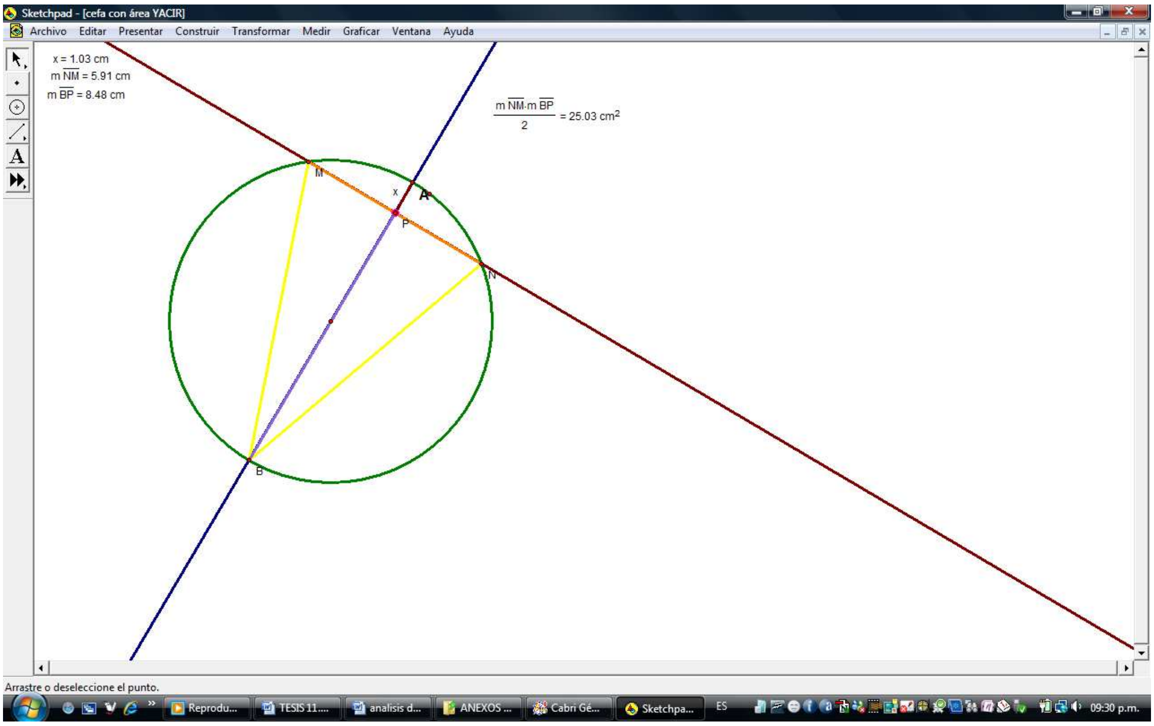



**Ilustración 22**

Al efectuar el análisis del problema, sustentando sus reflexiones y conjeturas con éste modelo dinámico, encuentra las solución algebraica correcta al problema, incluyendo el establecimiento algebraico de la relación funcional entre los elementos mencionados en la descripción del problema.(18).

En el mismo renglón, muestra evidencia de recurrir a conceptos del cálculo diferencial para justificar su resultado.

[17] El archivo digital se anexa en el CD adjunto.

Define la función como

$f : (0,2r) \rightarrow R$ / f(x)= $\sqrt{2rx - x^2}$ (2r-x)

Con su respectiva derivada:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 5rx + 2r^2}{\sqrt{2rx - x^2}}$$

Establece de manera precisa el dominio de la función, que le sirve para descartar otras raíces y ofrecer a x=r/2 como solución al problema.

La ilustración 23 muestra un momento determinado en que x>r en el modelo que ofrece Yacir.

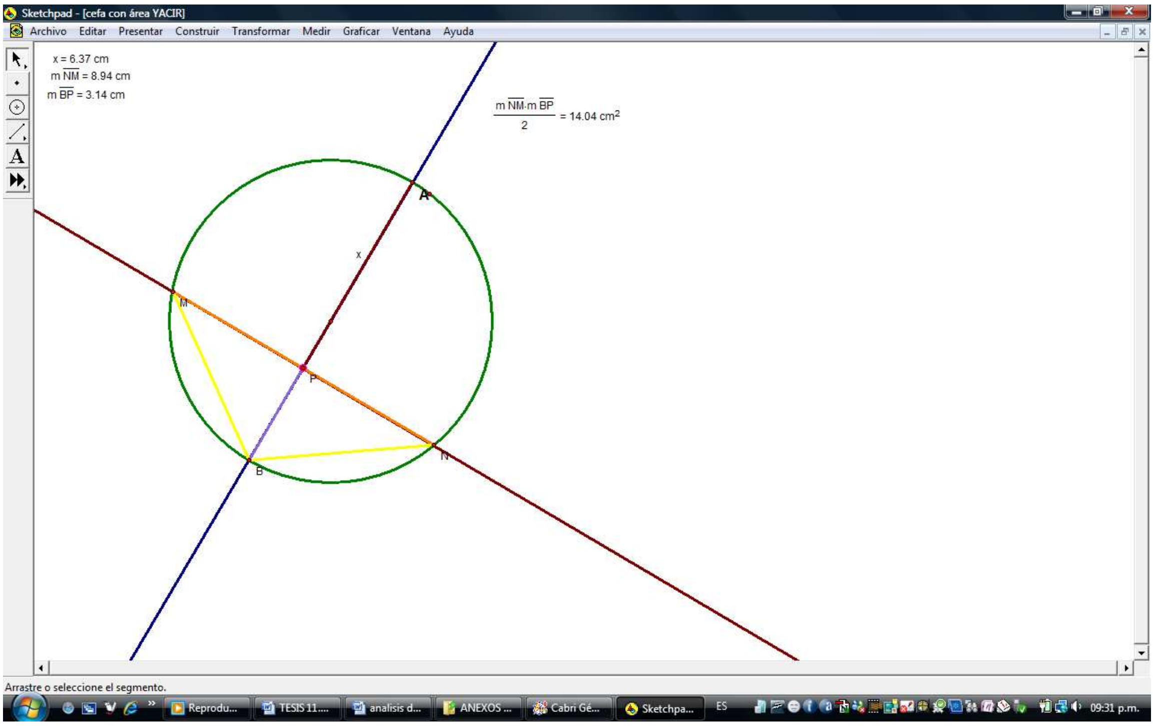



**Ilustración 23**

Sin embargo, al tomar el punto dinámico P y arrastrarlo fuera del círculo, se obtiene lo que muestra la ilustración 24.

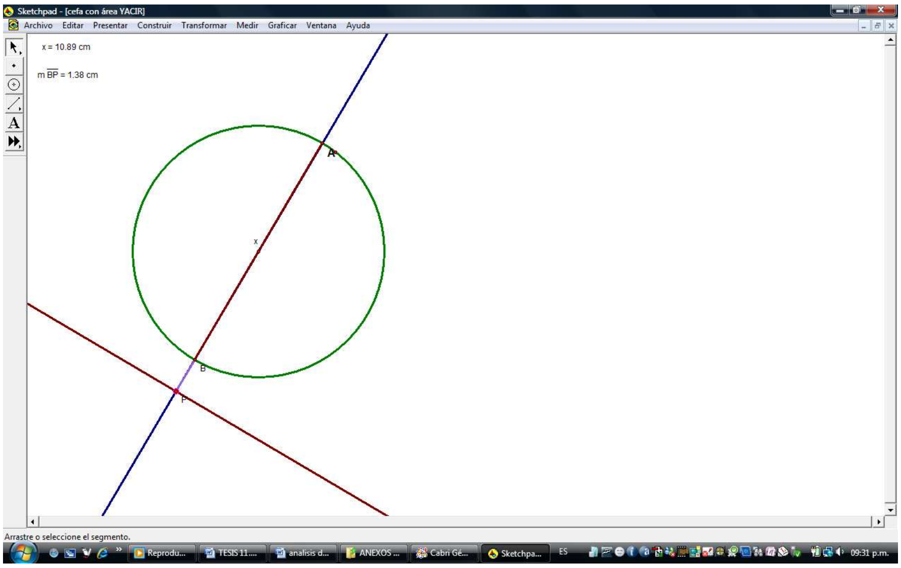



**Ilustración 24**

Se desplazó P en sentido contrario al ejemplo anterior y el modelo adoptó la forma que muestra la ilustración 25.

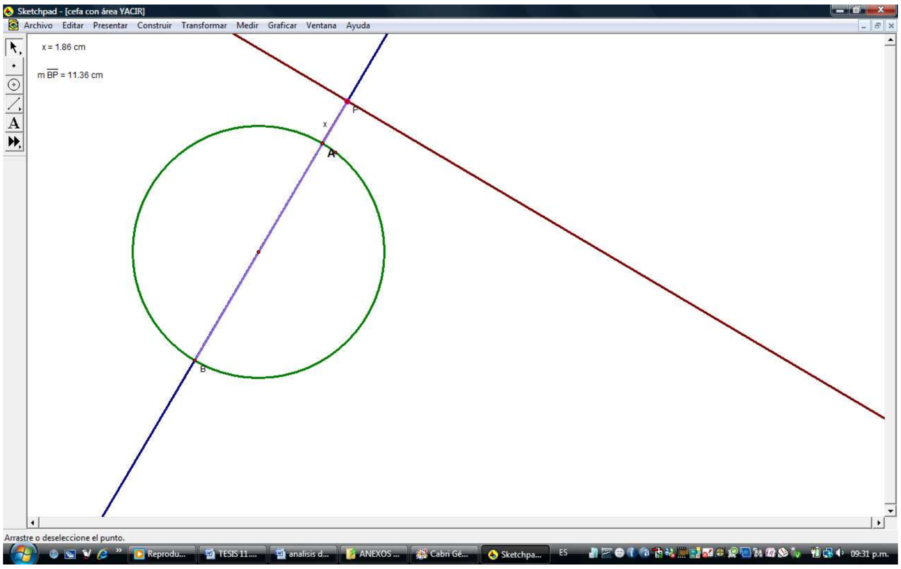



**Ilustración 25**

Estos dos momentos específicos sugieren que la construcción de Yacir no satisface las condiciones iniciales de que P sea un punto del diámetro. Es decir, que la construcción no supera la prueba del arrastre; situación que puede derivar en una interpretación inexacta del problema planteado.

Por otra parte, es necesario aclarar que el incidente con la duplicación de la propuesta de solución, determinó el abandono de Yacir de la plataforma de discusión. Solo se pudo tener comunicación con ella a través de correos personales fuera del ámbito del Congreso virtual.

# CONCLUSIONES

“Haciéndolo con lápiz y papel gran parte del esfuerzo se fue en hallar un punto que no existía”

**Mario**

El taller en línea permitió establecer comunicación fluida durante el periodo que duró la plataforma activa. Durante los catorce días empleados en el intercambio de opiniones, fue posible *subir* a la mesa de discusión, 20 comunicados que incluyeron el encuadre del taller, las actividades propuestas, los documentos y archivos necesarios para el desarrollo de las actividades y comentarios a trabajos y propuestas de solución presentados.

Las respuestas a estos mensajes fueron 99, disponibles para todos los participantes en el taller y para los coordinadores del Congreso virtual.

En esta experiencia, fue viable la recopilación de datos que permiten abordar las preguntas de investigación que dieron origen a este trabajo.

Como se presenta en el capitulo anterior, se catalogaros las respuestas y comentarios de los participantes en tres rubros: El papel de la tecnología, El problema de las cuatro secciones y El triángulo en el círculo; con el propósito de sistematizar la información que permita obtener algunas conclusiones de los estudios realizados y que arrojen información relevante con rasgos de implicaciones educativas.

En cuanto al comportamiento grupal de los profesores inscritos en el taller, pueden resaltarse los siguientes aspectos:

- Es espacio virtual descrito, permitió la reflexión y análisis de los profesores a partir de las actividades propuestas. Esta afirmación puede ejemplificarse en la conversación sostenida con Julio y en los comentarios que a partir de ese hecho se compartieron en la plataforma.
- La socialización de los conocimientos logrados por algunos participantes se transforma en un proceso que va de la mano de la iniciativa de los profesores dispuestos a asumir la discusión en turno. Pues en este sentido, se puede compartir de manera instantánea los resultados de la reflexión para dar pauta a la confrontación de posturas personales y/o teóricas.

En otro nivel de observación, y de acuerdo a las preguntas de investigación planteadas, se pueden ofrecer las siguientes conclusiones:

- *¿Cuáles son las características que presentan los profesores en la solución de problemas que involucran ideas relacionadas a la variación?*

De los problemas planteados, solo el de *las cuatro secciones* tenía la referencia explícita de resolverse de manera opcional utilizando lápiz y papel. Crear un modelo dinámico no es habitual, al menos en lo que los profesores de este taller han mostrado.

Sin embargo, los participantes muestran iniciativa al momento de abordar las actividades propuestas y, aún más, en las actividades disponibles de manera general en la plataforma: Ponencias, conferencias, discusiones vía Skipe[18], Talleres, Talleres de Congresos anteriores y Café virtual para discusiones.

De los participantes, solo Mario atacó con solvencia el problema de las cuatro secciones, demostrando habilidades algebraicas suficientes para plasmar de manera clara sus ideas de variación. Además, el sustento geométrico de sus ideas fue expresada de manera clara.

El resto manifestó solo herramientas algebraicas que resultaron insuficientes para dar solución acertada y fundamentada a este problema.

En resumen, el hecho de tener un dominio óptimo de técnicas propias del álgebra, no garantiza necesariamente que se puedan resolver problemas donde se involucra el concepto de variación.

- *¿Qué tipo de estrategias utilizan los profesores durante el proceso de solución de problemas que involucran estas nociones?*

Como se menciona en párrafos anteriores, las estrategias utilizadas por los profesores tiene una carga mayoritariamente algebraica.

En contraposición a esta manera de abordar problemas de este tipo, se encuentra la estrategia de Mario al dibujar dos situaciones concretas que se obtienen de dibujar M *más cerca* de A que de B y viceversa, pues de

[18] Software que permite hacer llamadas telefónicas sobre Internet, con la ventaja de que los usuarios pueden comunicarse gratuitamente entre ellos.

manera visual pudo estimar y delimitar posibles posiciones de M que aportaran más información para la resolución del problema.

Fuera de esta demostración, los participantes que ofrecieron propuestas de solución, se enfocaron a una demostración eminentemente algebraica. Además, la mayoría encontró soluciones parciales que satisfacían solo parte de las condiciones planteadas.

- *¿El uso de tecnología reorganiza el desarrollo conceptual de los profesores?*

Es necesario determinar qué tecnología es usada y de qué manera se utiliza como instrumento mediador.

En el caso de Julio, el video de las cuatro secciones le permitió replantearse estrategias de solución que no consideró de manera inicial.

En el caso de Yacir, y su ***cefa con área***, se puede observar que las construcciones en ambientes dinámicos también requieren de estructuras coherentes que permitan mostrar la información que se desea, depurando aquellos aspectos que se proyectan como riesgos inminentes al momento de una exploración fuera de los que el profesor cree que verá el estudiante.

Una construcción en ambiente dinámico, representa una herramienta que permite establecer juicios relativos a la condición de “necesario” y “suficiente” de cierto rasgo o atributo matemático.

- *¿Cuáles son las dificultades a las que se enfrentan los profesores con mayor frecuencia?*

Con fundamento en las evidencias que se pueden obtener bajo estas circunstancias, se puede afirmar que la mayor dificultad mostrada por los profesores para resolver el problema de las cuatro secciones, estriba en que no se toma en cuenta la simultaneidad de las condiciones que empiezan establecer a partir de conjeturas que se asumen de manera fragmentada. Es decir, no visualizan de manera general el problema a resolver y ofrecen soluciones algebraicas que no pueden sostenerse en ejemplos concretos.

Cuando un problema se ataca por partes, se corre el riesgo de omitir restricciones que afectan de manera global a estas fracciones que pueden resolverse independientemente.

Las dificultades que se presentan, se evidencian también, mediante los errores que los participantes fueron cometiendo en el proceso de resolución. El error más común que muestran los procesos de solución son descritos como aquellos en donde se construye y usa una implicación que no es verdadera. También es reconocible, el enunciamiento de proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas en la demostración de un problema. Errores 17 y 21 de la tipología de Franchi. (Franchi & Rincón, 2004).

Otro error reconocible en los procesos de resolución, es catalogada por Esteley-Villareal en dos sentidos: primero, como el no empleo o uso parcial de la información; por otro lado, como errores atribuidos a la no verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc., en un caso particular. (Esteley & Villareal, 1996)

Finalmente, a manera de conclusiones generales, se puede afirmar que:

1. Las actividades que se entablan en un ambiente de taller virtual deben estar diseñadas de manera que recojan evidencias objetivas y claras de que el alumno utiliza o no, determinados instrumentos.
2. Se debe cuidar que los programas empleados por la comunidad virtual sean compatibles o que no dependan de un sistema operativo en particular. Por ejemplo, los editores de fórmulas, o los archivos generados en editores de texto u hojas de cálculo.
3. Debe evitarse dificultades la transferencia de archivos de una extensión comercial determinada. Ante ello, se puede establecer que el uso de

paquetes gratuitos como *OpenOficce*, pues no causa conflicto con otras aplicaciones de paquetería comercial.

4. El uso de tecnología, bien dirigido, redituará indudablemente en disminuir los esfuerzos sin sentido, o construcciones demasiado complejas para las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. En este tenor, las herramientas visuales permiten percibir un problema con una óptica complementaria sin duda para orientar los razonamientos aún con apariencia de haber sido realizados en secuencias de aparente orden lógico.
5. Disminuir la distancia tecnológica entre las generaciones representadas, por una parte, por los maestros que se resisten a la vorágine tecnológica, y los alumnos dispuestos a asumir el reto de coexistir con artefactos tecnológicos cada vez más sofisticados.
6. El uso, o no, de tecnología como herramienta de mediación entre los estudiantes y el conocimiento, puede generar las mismas inferencias y conjeturas entre los estudiantes al intentar resolver un problema. La diferencia estriba en que un entorno digital puede propiciar ambientes que permitan diversificar las representaciones logradas por los estudiantes hasta alcanzar aprendizajes que en otras circunstancias no son posibles. Incluso pueden crearse las condiciones para rebasar el currículo propuesto.
7. El papel del responsable del desarrollo de las actividades en un ambiente de taller en línea, debe considerar, entre otros aspectos que:
   a. Sus observaciones, comentarios y /o sugerencias vertidas durante el desarrollo del taller, promueva la reflexión y/o continuidad de la discusión, con el objetivo de propiciar mejores condiciones para el aprendizaje. Es decir, comentarios como el tercero o cuarto cuestionamiento a Julio en (10), no necesariamente promueven estas condiciones, puesto que tienden más a estrechar la conversación.
   b. Debe haber una continuidad fluida en la conversación en tiempo diferido. Por ejemplo, en Soledad (22), se presenta un salto en la

conversación que pasó desapercibido en ese momento pero que podría haber aportado elementos  de análisis

c. Su posición debe ser objetiva, crítica e imparcial ante las eventualidades que surgen de manera inminente en el transcurso de las actividades.
d. Debe tener dominio eficiente de los recursos y herramientas disponibles en la plataforma utilizada.
e. Debe tener especial cuidado en el manejo efectivo del tiempo dedicado a cada participante. En especial. A mayor interacción, mayor disposición a la discusión y, por ende a desarrollar mejores productos que evidencian los aprendizajes logrados.

# REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). **La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos**. Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Arnaus, J. (1995). **Diseños experimentales en psicología y educación**. Volumen 2. Trillas. México.

Bassols, M. (2003). **Expresión-comunicación y lenguajes en la práctica educativa. Creación de proyectos**. Ediciones octaedro. Primera edición. España.

Burke J. & Ornstein (2001). **Del hacha al chip. Cómo la tecnología cambia nuestras mentes**. Editorial Planeta. Barcelona, España.

Courant, R. & Robbins, H. (2002). **¿Qué son las matemáticas ?.** Conceptos y métodos fundamentales. Fondo de cultura económica. México.

Chassapis (1999, p278) **The mediation of tools in tehe development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example**

Chacón F. (1994). **Un modelo de evaluación de los aprendizajes en Educación a Distancia.** En Memorias del Tercer Encuentro Internacional de Educación a Distancia. Guadalajara: FIL-CREAD, pp. 1-21.

Dreyfus, T. (1990). **Advanced Mathematical Thinking**. En P. Nesher & J. Klipatrik (eds), Mathematics and cognition: a Research Síntesis by the Internacional Group for the Phsicology of Mathematics Education (pp. 113-134). Cambridge: University Press.

Duval, R. (1999). **Semiosis y Pensamiento Humano.** Registros Semióticos y aprendizajes Intelectuales. Artes Gráficas Univalle. Colombia

Esteley, C. & Villareal,M. (1996). **Análisis y Categorización de errores en Matemática**. Revista. de Educación Matemática. Volumen 11. Nº 1. (16−35)

Franchi, L & Rincón, A. (2004) **Tipología de errores en el área de la geometría plana**. Educere. Investigación arbitrada. Año 8. No. 24

Finney, R.(1999). **Cálculus**. Addison-wesley. Second editions. U.S.A.

Geertz, C (1992), **Interpretación de las culturas**, Editorial Gedisa. Barcelona.

Hitt, F. (1996). **La modelación matemática con el apoyo de la calculadora graficadora TI 92.** En Memorias del VIII Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. Hitt, F.; Hernández, V. y Villalba, M. (Eds.).

Hughes-Hallet, et al. (2004). ***Cálculo aplicado***. Compañía Editorial Continental. México.

Moreno, L (2003). **Cognición y mediación instrumental**. En VI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Conferencias magistrales. Consejo Mexicano de Investigación Educativa A.C. México.

Moreno, L. & Rojano, T. (2002). **Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo**. En Ministerio de Educación Nacional (ED.) Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá.

Moreno, L. & Sacristán, A. I. (1996) **Representaciones y Aprendizaje**. En Investigaciones en Matemática Educativa, Hitt, F. (Ed.) Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Moreno, L. & Santos, L. M. (2001). **De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática**. Educación Matemática. Vol 13 No. 2

Moreno, L. & Waldegg, G. (2002). **Fundamentacón cognitiva del currículo de matemáticas**. Memorias del seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. 40-66. Colombia.

Moreno, L. & Waldegg, G. (2004) **Aprendizaje, matemáticas y tecnología.** Edit. Santillana SXXI.

Moreno, L. (2002). **Evolución y Tecnología**. Memorias del seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. 67-80. Colombia.

Moreno. L. (2003). **Cognición y mediación instrumental.** VI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Conferencias Magistrales. 257-274

Ong, W. ((1987). **Oralidad y escritura. Tecnología de la palabra**. Fondo de Cultura Económica. México.

Polya, G. (1985) **¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?.** Editorial Trillas. México

Poveda, R. & Salas, O. (2003). **Uso de la ti-92 en la enseñanza del tema funciones**, Universidad Nacional de C.R., Proyecto de Apoyo a la Investigación en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, pp. 1-4.

Quezada, M. (1986) **Cálculo de primitivas en bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de Cálculo diferencial**. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Richards, G. (2002). The **challenges of the learning object paradigm**. Canadian Journal of Learning and Technology. V. 28, No. 3, p. 3-9.

Santillán, M. (2002) **Mediación instrumental con calculadora**. Tesis doctoral

Santos, L. M. (1992) **La resolución de problemas: El trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas**. Educación Matemática, Vol. 2 No. 2

Simone, R. (2001). **La tercera fase**. Grupo editorial Santillana. Madrid.

Spivak, M. (1992). **Cálculus**. Cálculo infinitesimal. Reverté. México, 1992

Tamayo, M. (2005). **El proceso de la investigación científica**. Limusa. México.

Vygotsky, L. (1986). **Pensamiento y lenguaje.** Ediciones Paidós. Barcelona.

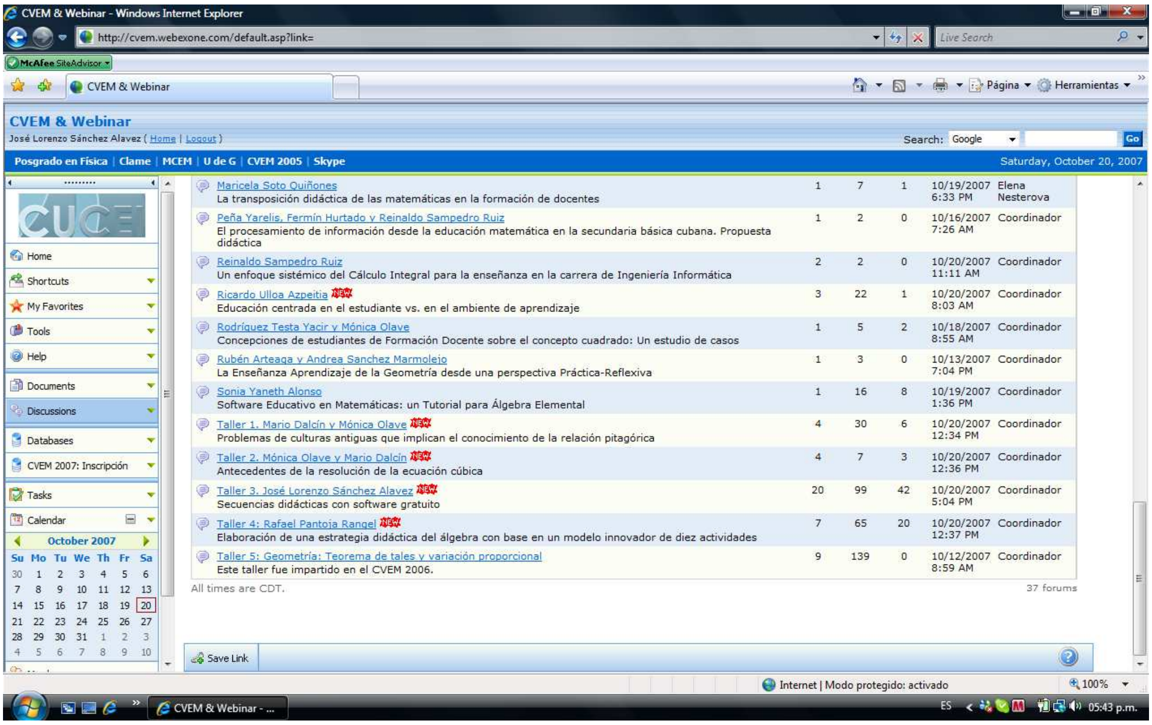
Wedemeyer, C.A. (1971). **Independent study**. En L.C. Deighton (Ed.), The encyclopedia of education, (Vol. 4, p. 550). New York: MacMillan.

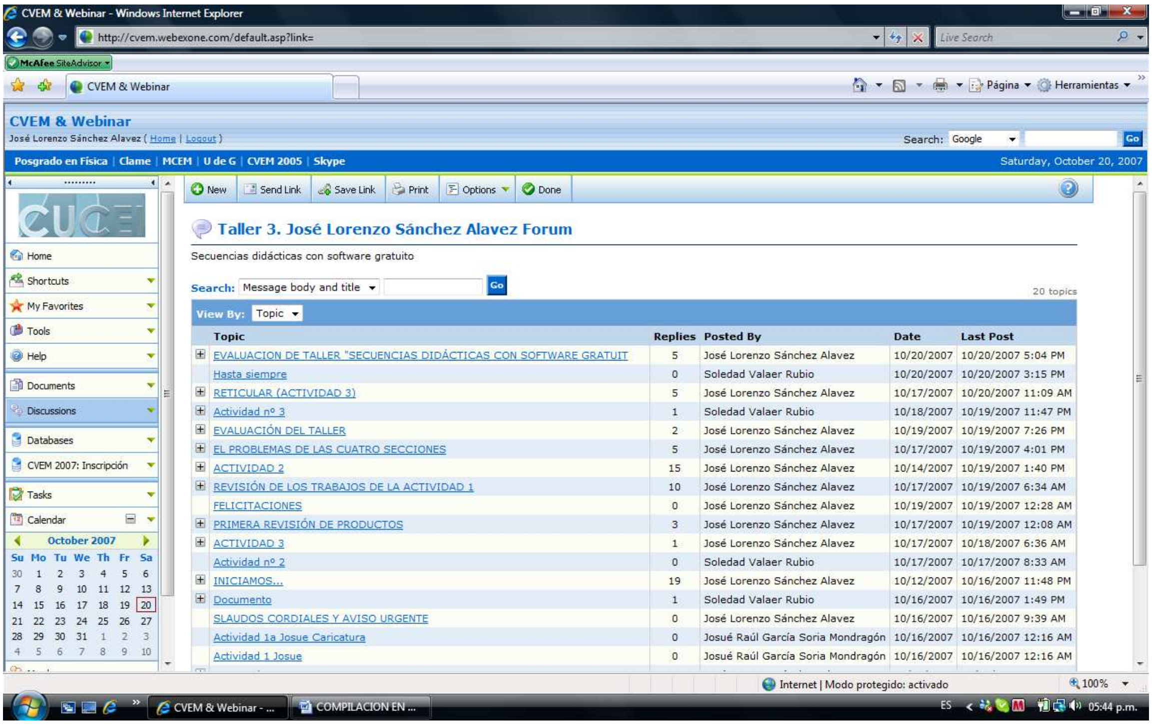
Wertsch, J. (1985). **Vygotsky y la formación social de la mente**. Paidós. Barcelona.

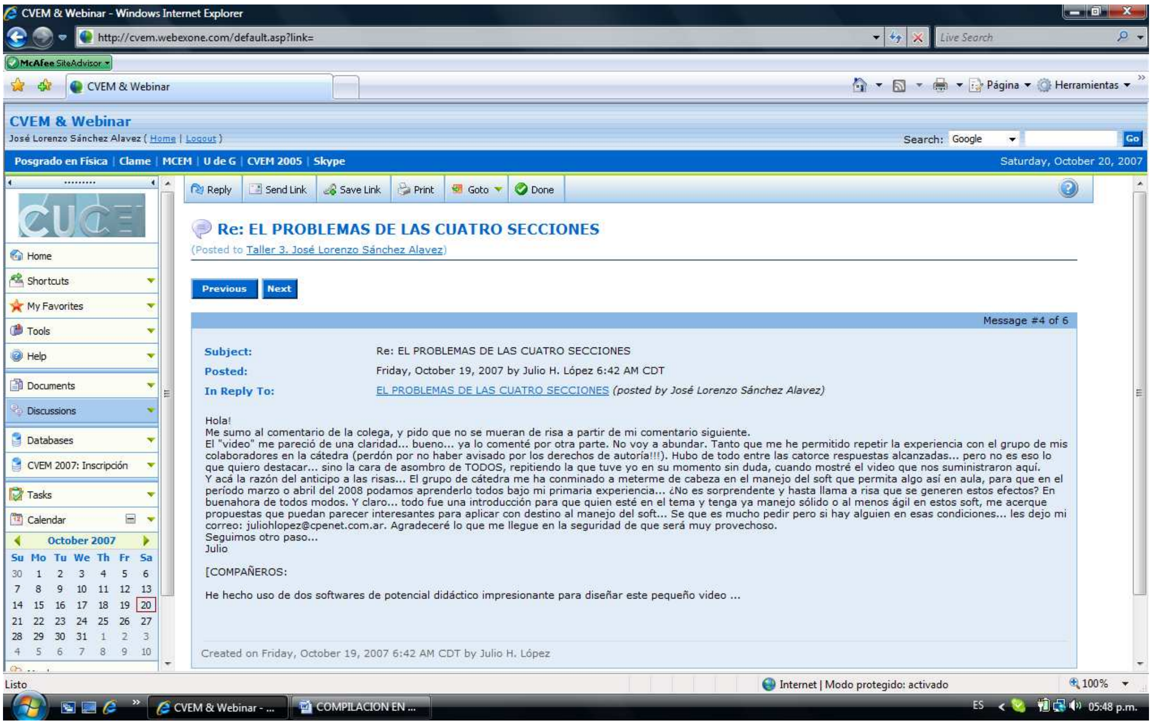
Wertsch, J. (1993). **Voces de la mente**. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Visor distribuciones. Madrid.

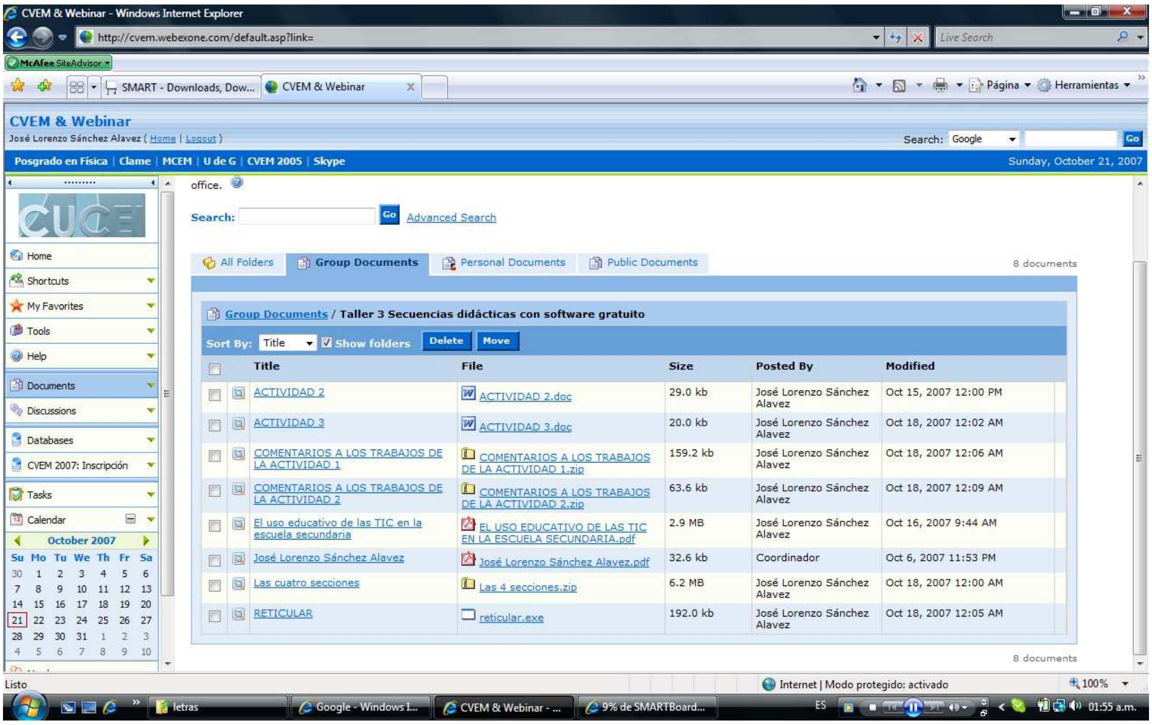
# ANEXO A


CVEM & Webinar
Member Login
Login Name:
Password:
Remember me
Log In
Forgot your password?
Login trouble?
Not a member?
Enter as a Guest
Join Now
About CVEM & Webinar
ANPM
Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (México) y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Guadalajara convocan:
V Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas
CVEM 2007
7 al 21 de Octubre de 2007
El evento se realizará en un espacio virtual para la presentación de ponencias y talleres sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diversos niveles escolares. Esta modalidad permite la actualización y la colaboración mediante el intercambio de opiniones y propuestas educativas.
CVEM utiliza como canal de comunicación Intranet, de forma que los participantes acuden, desde sus propios ordenadores sin necesidad de desplazamientos físicos, pero que a todos los niveles, representa un congreso con las mismas posibilidades y características que los congresos convencionales, incluso que aporta algunas ventajas como son: participación gratuita, programa amplio, mayor comunicación entre participantes.
Inscripción cerrada
Problemas con su clave de acceso y contraseña reportar al Comité Organizador: cvem.cucei@udg.edu.mx

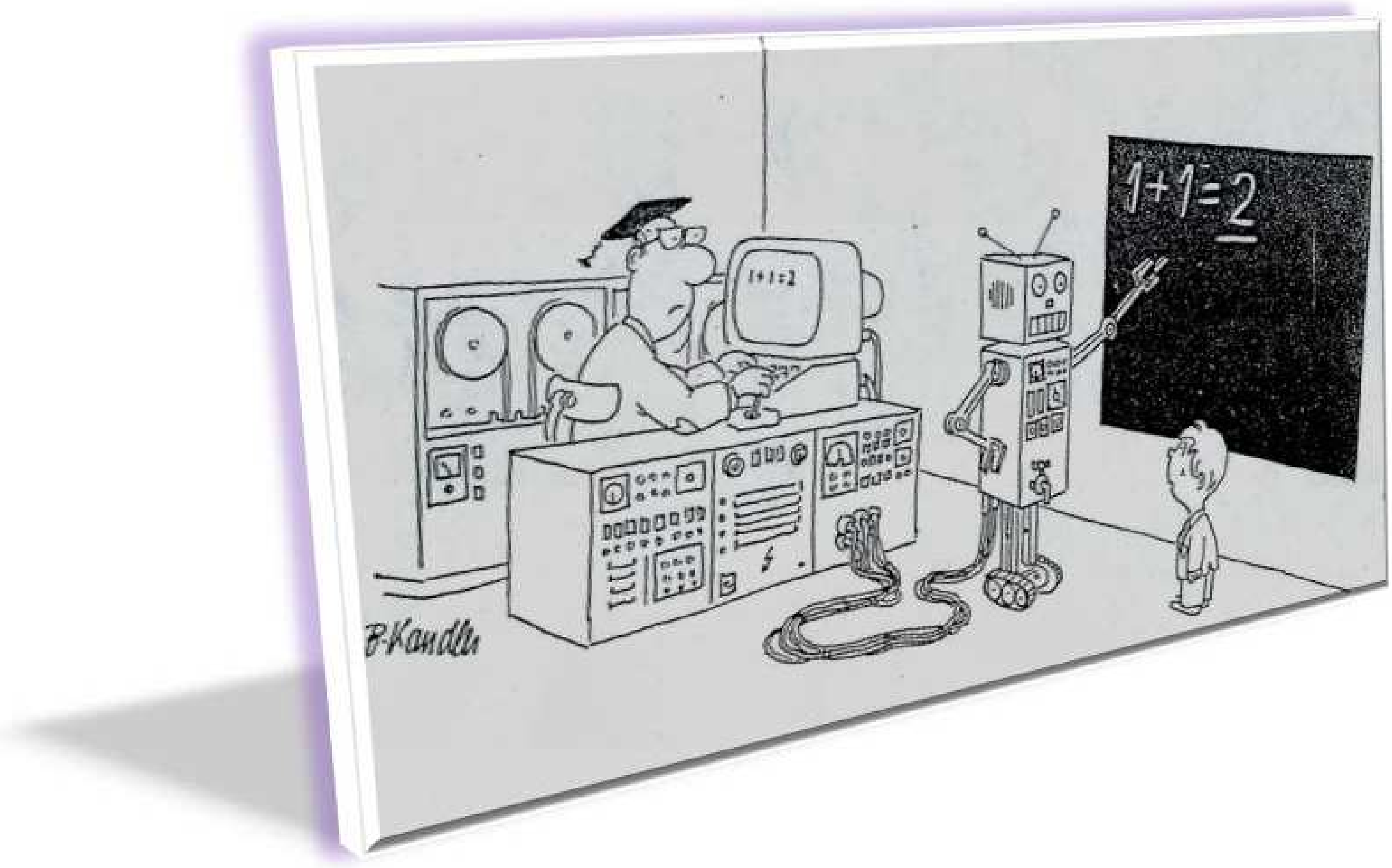

CVEM & Webinar - Windows Internet Explorer
http://cvem.webexone.com/default.asp?link=
CVEM & Webinar
José Lorenzo Sánchez Alavez ( Home | Logout )
Search: Google Go
Posgrado en Física | Clame | MCEM | U de G | CVEM 2005 | Skype
Saturday, October 20, 2007
Home
Shortcuts
My Favorites
Tools
Help
Documents
Discussions
Databases
CVEM 2007: Inscripción
Tasks
Calendar
October 2007
Maricela Soto Quiñones
La transposición didáctica de las matemáticas en la formación de docentes
Peña Yarelis, Fermín Hurtado y Reinaldo Sampedro Ruiz
El procesamiento de información desde la educación matemática en la secundaria básica cubana. Propuesta didáctica
Reinaldo Sampedro Ruiz
Un enfoque sistémico del Cálculo Integral para la enseñanza en la carrera de Ingeniería Informática
Ricardo Ulloa Azpeitia
Educación centrada en el estudiante vs. en el ambiente de aprendizaje
Rodríguez Testa Yacir y Mónica Olave
Concepciones de estudiantes de Formación Docente sobre el concepto cuadrado: Un estudio de casos
Rubén Arteaga y Andrea Sanchez Marmolejo
La Enseñanza Aprendizaje de la Geometría desde una perspectiva Práctica-Reflexiva
Sonia Yaneth Alonso
Software Educativo en Matemáticas: un Tutorial para Álgebra Elemental
Taller 1. Mario Dalcín y Mónica Olave
Problemas de culturas antiguas que implican el conocimiento de la relación pitagórica
Taller 2. Mónica Olave y Mario Dalcín
Antecedentes de la resolución de la ecuación cúbica
Taller 3. José Lorenzo Sánchez Alavez
Secuencias didácticas con software gratuito
Taller 4: Rafael Pantoja Rangel
Elaboración de una estrategia didáctica del álgebra con base en un modelo innovador de diez actividades
Taller 5: Geometría: Teorema de tales y variación proporcional
Este taller fue impartido en el CVEM 2006.
All times are CDT.
37 forums
Save Link


CVEM & Webinar - Windows Internet Explorer
http://cvem.webexone.com/default.asp?link=
CVEM & Webinar
José Lorenzo Sánchez Alavez ( Home | Logout )
Posgrado en Física | Clame | MCEM | U de G | CVEM 2005 | Skype
Saturday, October 20, 2007
Taller 3. José Lorenzo Sánchez Alavez Forum
Secuencias didácticas con software gratuito
20 topics
Topic | Replies | Posted By | Date | Last Post
EVALUACION DE TALLER "SECUENCIAS DIDÁCTICAS CON SOFTWARE GRATUIT | 5 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/20/2007 | 10/20/2007 5:04 PM
Hasta siempre | 0 | Soledad Valaer Rubio | 10/20/2007 | 10/20/2007 3:15 PM
RETICULAR (ACTIVIDAD 3) | 5 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/17/2007 | 10/20/2007 11:09 AM
Actividad nº 3 | 1 | Soledad Valaer Rubio | 10/18/2007 | 10/19/2007 11:47 PM
EVALUACIÓN DEL TALLER | 2 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/19/2007 | 10/19/2007 7:26 PM
EL PROBLEMAS DE LAS CUATRO SECCIONES | 5 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/17/2007 | 10/19/2007 4:01 PM
ACTIVIDAD 2 | 15 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/14/2007 | 10/19/2007 1:40 PM
REVISIÓN DE LOS TRABAJOS DE LA ACTIVIDAD 1 | 10 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/17/2007 | 10/19/2007 6:34 AM
FELICITACIONES | 0 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/19/2007 | 10/19/2007 12:28 AM
PRIMERA REVISIÓN DE PRODUCTOS | 3 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/17/2007 | 10/19/2007 12:08 AM
ACTIVIDAD 3 | 1 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/17/2007 | 10/18/2007 6:36 AM
Actividad nº 2 | 0 | Soledad Valaer Rubio | 10/17/2007 | 10/17/2007 8:33 AM
INICIAMOS... | 19 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/12/2007 | 10/16/2007 11:48 PM
Documento | 1 | Soledad Valaer Rubio | 10/16/2007 | 10/16/2007 1:49 PM
SLAUDOS CORDIALES Y AVISO URGENTE | 0 | José Lorenzo Sánchez Alavez | 10/16/2007 | 10/16/2007 9:39 AM
Actividad 1a Josue Caricatura | 0 | Josué Raúl García Soria Mondragón | 10/16/2007 | 10/16/2007 12:16 AM
Actividad 1 Josue | 0 | Josué Raúl García Soria Mondragón | 10/16/2007 | 10/16/2007 12:16 AM


CVEM & Webinar - Windows Internet Explorer
CVEM & Webinar
José Lorenzo Sánchez Alavez ( Home | Logout )
Posgrado en Física | Clame | MCEM | U de G | CVEM 2005 | Skype
Saturday, October 20, 2007
Re: EL PROBLEMAS DE LAS CUATRO SECCIONES
(Posted to Taller 3. José Lorenzo Sánchez Alavez)
Message #4 of 6
Subject: Re: EL PROBLEMAS DE LAS CUATRO SECCIONES
Posted: Friday, October 19, 2007 by Julio H. López 6:42 AM CDT
In Reply To: EL PROBLEMAS DE LAS CUATRO SECCIONES (posted by José Lorenzo Sánchez Alavez)
Hola!
Me sumo al comentario de la colega, y pido que no se mueran de risa a partir de mi comentario siguiente.
El "video" me pareció de una claridad... bueno... ya lo comenté por otra parte. No voy a abundar. Tanto que me he permitido repetir la experiencia con el grupo de mis colaboradores en la cátedra (perdón por no haber avisado por los derechos de autoría!!!). Hubo de todo entre las catorce respuestas alcanzadas... pero no es eso lo que quiero destacar... sino la cara de asombro de TODOS, repitiendo la que tuve yo en su momento sin duda, cuando mostré el video que nos suministraron aquí.
Y acá la razón del anticipo a las risas... El grupo de cátedra me ha conminado a meterme de cabeza en el manejo del soft que permita algo así en aula, para que en el período marzo o abril del 2008 podamos aprenderlo todos bajo mi primaria experiencia... ¿No es sorprendente y hasta llama a risa que se generen estos efectos? En buenahora de todos modos. Y claro... todo fue una introducción para que quien esté en el tema y tenga ya manejo sólido o al menos ágil en estos soft, me acerque propuestas que puedan parecer interesantes para aplicar con destino al manejo del soft... Se que es mucho pedir pero si hay alguien en esas condiciones... les dejo mi correo: juliohlopez@cpenet.com.ar. Agradeceré lo que me llegue en la seguridad de que será muy provechoso.
Seguimos otro paso...
Julio
[COMPAÑEROS:
He hecho uso de dos softwares de potencial didáctico impresionante para diseñar este pequeño video ...
Created on Friday, October 19, 2007 6:42 AM CDT by Julio H. López


CVEM & Webinar - Windows Internet Explorer
http://cvem.webexone.com/default.asp?link=
CVEM & Webinar
José Lorenzo Sánchez Alavez ( Home | Logout )
Posgrado en Física | Clame | MCEM | U de G | CVEM 2005 | Skype
Sunday, October 21, 2007
Search:
Advanced Search
All Folders
Group Documents
Personal Documents
Public Documents
8 documents
Group Documents / Taller 3 Secuencias didácticas con software gratuito
Sort By: Title
Show folders
Delete
Move
Title
File
Size
Posted By
Modified
ACTIVIDAD 2
ACTIVIDAD 2.doc
29.0 kb
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 15, 2007 12:00 PM
ACTIVIDAD 3
ACTIVIDAD 3.doc
20.0 kb
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 18, 2007 12:02 AM
COMENTARIOS A LOS TRABAJOS DE LA ACTIVIDAD 1
COMENTARIOS A LOS TRABAJOS DE LA ACTIVIDAD 1.zip
159.2 kb
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 18, 2007 12:06 AM
COMENTARIOS A LOS TRABAJOS DE LA ACTIVIDAD 2
COMENTARIOS A LOS TRABAJOS DE LA ACTIVIDAD 2.zip
63.6 kb
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 18, 2007 12:09 AM
El uso educativo de las TIC en la escuela secundaria
EL USO EDUCATIVO DE LAS TIC EN LA ESCUELA SECUNDARIA.pdf
2.9 MB
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 16, 2007 9:44 AM
José Lorenzo Sánchez Alavez
José Lorenzo Sánchez Alavez.pdf
32.6 kb
Coordinador
Oct 6, 2007 11:53 PM
Las cuatro secciones
Las 4 secciones.zip
6.2 MB
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 18, 2007 12:00 AM
RETICULAR
reticular.exe
192.0 kb
José Lorenzo Sánchez Alavez
Oct 18, 2007 12:05 AM
8 documents
Home
Shortcuts
My Favorites
Tools
Help
Documents
Discussions
Databases
CVEM 2007: Inscripción
Tasks
Calendar
October 2007
Internet | Modo protegido: activado
100%

# ANEXO B



# ANEXO C

Ejecutable desarrollado por la Subdirección Académica de la Dirección General de Educación Secundaria Técnica en el periodo escolar 2006-2007.

La pantalla despliega la currícula del programa de estudios vigente; al pulsar sobre un contenido específico, se muestra las relaciones transversales de los subtemas que componen uno de los ocho temas que se desarrollan a lo largo de los tras grados de estudio de la escuela secundaria. Simultáneamente se presentan en uno de los tres colores asignados (amarillo para “Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico”, verde para “Forma, espacio y medida, azul para “Manejo de la Información”) y los conocimientos y habilidades propios del apartado seleccionado.